UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA

GISELE MEZZARI SILVEIRA

# UNIDADE ENTRE LÓGICO E HISTÓRICO NO MOVIMENTO CONCEITUAL DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO PROPOSTA POR DAVÝDOV E COLABORADORES PARA O ENSINO DAS OPERAÇÕES DA ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Tubarão

2015

**GISELE MEZZARI SILVEIRA**

# UNIDADE ENTRE LÓGICO E HISTÓRICO NO MOVIMENTO CONCEITUAL DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO PROPOSTA POR DAVÝDOV E COLABORADORES PARA O ENSINO DAS OPERAÇÕES DA ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Dissertação apresentada ao programa de Pós - Graduação em Educação, linha de pesquisa Educação em Ciências da Universidade do Sul de Santa Catarina, requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação.

Orientadora: Profª. Drª. Josélia Euzébio da Rosa

Tubarão

2015

GISELE MEZZARI SILVEIRA

**UNIDADE ENTRE LÓGICO E HISTÓRICO NO MOVIMENTO CONCEITUAL DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO PROPOSTA POR DAVÝDOV E COLABORADORES PARA O ENSINO DAS OPERAÇÕES DA ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO**

Esta Dissertação foi julgada adequada à obtenção do título de Mestre em Educação e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Educação - Mestrado, da Universidade do Sul de Santa Catarina.

Tubarão, 19 de fevereiro de 2015.

Josélia E. da Rosa

Professora e Presidenta da Banca Examinadora Josélia Euzébio da Rosa, Dra.

Universidade do Sul de Santa Catarina

Professor José Carlos Libâneo, Dr

Examinador Externo – Pontífica Universidade Católica de Goiás

Professor Doutor Ademir Damázio, Dr.

Examinador Externo – Universidade do Extremo Sul Catarinense

Gilvan Luiz M. Costa

Professor Doutor Gilvan Luiz Machado Costa, Dr.

Examinador Interno – Universidade do Sul de Santa Catarina

Silveira, Gisele Mezzari, 1984-
S59 Unidade entre lógico e histórico no movimento conceitual do sistema de numeração proposta por Davýdov e colaboradores para o ensino das operações da adição e subtração / Gisele Mezzari Silveira; -- 2015.
186 f. il. color. ; 30 cm

Orientadora: Josélia Euzébio da Rosa.
Dissertação (mestrado)–Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2015.
Inclui bibliografias.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Matemática – Problemas e exercícios. 3. Ensino - Metodologia. 4. Materialismo dialético. I. Rosa, Josélia Euzébio. II. Universidade do Sul de Santa Catarina - Mestrado em Educação. III. Título.

CDD (21. ed.) 510.7

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária da Unisul

*A todos que participaram de forma direta ou indiretamente durante a realização deste e, em especial, minha mãe Veronice (In memorian).*

## AGRADECIMENTOS

A realização da presente dissertação, desde o momento que ingressamos no mestrado, só foi possível porque tivemos o apoio, a compreensão e participação de muitas pessoas. A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a concretização deste trabalho, deixo-lhes a minha gratidão. Agradeço especialmente:

A Deus por ter colocado pessoas tão especiais em minha vida.

À profª. Drª. Josélia Euzébio da Rosa, minha orientadora, a quem admiro e muito respeito. É uma referência profissional e acadêmica fundamental, com sua ética e compromisso no trabalho científico. Agradeço por compartilhar os seus conhecimentos, pela paciência, dedicação, orientação, pelo companheirismo e preocupação que teve por mim em diversos momentos. Além de professora, uma grande amiga.

Aos professores doutores Ademir Damazio e Gilvan Luiz Machado Costa por suas valiosas contribuições e reflexões teóricas no exame de qualificação e na defesa.

Ao prof. Dr. José Carlos Libâneo pelo aceite de participar da banca de defesa e pelas contribuições.

Aos professores doutores: Bergamo, Raquel, Elaine, Ori e Malu, pela presença nos Seminários realizados na Unisul e empenho em contribuir com o presente trabalho.

Aos professores doutores do Mestrado em Educação da Unisul que, durante as disciplinas cursadas, promoveram discussões e empenharam-se em contribuir com o desenvolvimento da presente investigação. Também a todos os colegas de mestrado.

À coordenação do curso, professoras doutoras Graça e Leonete, e à secretária Dani, pelas oportunidades oferecidas, assim como pela disposição nos esclarecimentos.

Aos líderes e integrantes do GPEMAHC (Grupo de Pesquisa em Educação Matemática na Abordagem Histórico-Cultural): Professores Dr. Ademir, Dr.ª Josélia, Eloir, Sandra, Josi, Lucas Sid, Lucas Lemos, Willian, Yúri, Osvaldo, Manoel, Mila, Day, Val, Ediséia, Cris e Ester, pelos momentos de estudos, perguntas e reflexões, e pelos materiais bibliográficos disponibilizados.

À Sandra, Josi, Ana, Bia, Ediséia, Elita, Cris e Monica pela cuidadosa leitura do texto, com olhar crítico, questionador e referente à escrita textual. Obrigada pelas contribuições, pelos momentos que compartilhamos de estudo, reflexões, angústias e pela amizade.

A todos os familiares e amigos, em especial: meus pais, Ireno e Veronice (*in memorian*), à minha querida irmã Gessica, meus sogros Ernei e Antônio José, à cunhada Glads pelo apoio, incentivo e compreensão pelos momentos de ausência.

Ao Galgany, meu grande amor, companheiro em todos os momentos, obrigada pelo carinho, presença e incansável apoio ao longo da elaboração deste trabalho.

A todos que me hospedaram em suas casas e também pelas caronas (não mencionarei os nomes, pois não me perdoaria caso deixasse de citar alguém).

A todos que estiveram presente no dia da defesa do presente trabalho.

À CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro para o desenvolvimento desta pesquisa (em forma de bolsa de estudo).

MUITO OBRIGADA!

*O método é, "ao mesmo tempo, pré-*requisito *e produto, o instrumento e o resultado do estudo" (VIGOTSKI, 2000, p. 86).*

**RESUMO**

A presente investigação foi desenvolvida no contexto da Educação Matemática, com foco para o modo de organização do ensino a partir dos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural. A partir desta Teoria, Davýdov e colaboradores elaboraram uma proposta para o Ensino de Matemática com o objetivo de promover o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes. Na presente investigação, o objeto de estudo consiste na unidade entre o lógico e o histórico no movimento conceitual da proposição davydoviana para a operacionalização do sistema de numeração, na especificidade da adição e subtração. A pesquisa, de natureza teórica, tem seu fundamento no materialismo dialético como método. Dentre suas categorias, privilegiamos o lógico, histórico, universal, particular e singular. A hipótese é que o movimento conceitual adotado na proposição de ensino davydoviana para a operacionalização do sistema de numeração contempla a unidade entre o lógico e o histórico. Esta hipótese insere-se no âmbito do seguinte problema de pesquisa: qual a expressão da unidade entre o lógico e o histórico no movimento conceitual proposto por Davýdov e colaboradores para o ensino da operacionalização do sistema de numeração? O pressuposto é de que a unidade entre o lógico e o histórico se expressa na conexão existente entre o universal, o particular e o singular. O objetivo centra-se na investigação da conexão dialética existente entre o universal, o particular e o singular no movimento conceitual, que se expressa na proposta de ensino de Davýdov e colaboradores para a operacionalização do sistema de numeração. Os livros didáticos e de orientação ao professor da proposição davydoviana para o segundo ano do Ensino Fundamental constituíram a fonte de dados. O processo de investigação ocorreu em três etapas. Inicialmente, a apropriação de cada tarefa; depois, a análise de suas diferentes formas de desenvolvimento e, finalmente, a revelação da interconexão das mesmas. Para o processo de exposição da pesquisa consideramos o procedimento do abstrato ao concreto. Neste procedimento, consideramos o processo de desenvolvimento do sistema de numeração, do sensorial ao racional, por meio das etapas objetal, gráfica, literal e numeral nas diferentes bases numéricas. Revelamos a relação essencial do sistema de numeração, que consiste na formação de suas ordens, gênese das operações de adição e subtração. Concluímos que a essência das operações de adição e subtração, na proposição davydoviana, é constituída por agrupamentos e reagrupamentos das ordens, determinadas pelo valor da base numérica, o que enriquece a lógica do sistema de numeração, porque abarca seu desenvolvimento. Também que a unidade entre o lógico e o histórico da operacionalização do sistema de numeração se expressa na conexão existente entre o universal (relação parte-todo na qual ocorre o agrupamento ou reagrupamento das ordens), o particular (base numérica adotada) e o singular (resultado da operação).

Palavras-chave: Educação Matemática. Teoria Histórico-Cultural. Proposição davydoviana. Sistema de numeração. Operações de adição e subtração.

**ABSTRACT**

This investigation was performed in the Mathematics Education context, focusing on the way of teaching organization based on the Historic-Cultural Theory assumptions. From this Theory, Davýdov and co-workers elaborated propose for Mathematics Teaching with the aim to promote the theoretical thoughts development on students. In this investigation, the object of study consists in the unity between the logical and the historical on the conceptual movement of the proposition by Davýdov for the operation of the numbering system, specifically on addition and subtraction. The research presents theoretical nature an its foundation on the dialectical materialism as method. Among its categories, the logical, historical, universal, particular and singular were privileged. The hypothesis is the conceptual movement adopted in the teaching proposition by Davýdov for operate the numbering system contemplates the unity between the logical and the historical. This hypothesis is inserted in the following research problem scope: What is the unity expression between the logical and historical on the conceptual movement proposed by Davýdov and co-workers for teaching operate the numbering system? The assumption is the unity between the logical and the historical is expressed on the connection between the universal, the particular and the singular. The aim is centered on the dialectic investigation presents among the universal, the particular and the singular on the conceptual movement, expressed on the teaching proposition by Davýdov and co-workers for operate the numbering system. The textbooks and teacher guiding of the proposition by Davýdov for the Elementary School second grade constituted the data source. The investigation process was carried out in three stages. Firstly there was the appropriation of each tasks; then, the analysis of the different ways of development; and finally, the revelation of the interconnection among them. For the research exposure process, we considered the procedure from the abstract to the concrete. In it, we considered the development process of the numbering system from the sensory to the rational one, through the stages object, graphic, literal and numeral on different number bases. We revealed the essential relation of the numbering system, which consists on the formation of its orders, addition and subtraction operation genesis. We conclude the essence of addition and subtraction operations, in the proposition by Davýdov, is constituted by grouping and regrouping of orders, determined by the value of the number base, what enriches the logical of the numbering system, because cover its development. We also conclude that the unity between the logical and historical of operates the numbering system is expressed on the connection among the universal (whole-part relation in which occurs the grouping and the regrouping of orders), the particular (base number adopted) and the singular (result of the operation).

Key-words: Mathematics Education. Historical-Cultural Theory. Proposition by Davýdov. Numbering system. Addition and subtraction operations.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Ilustração 1 – A medição do volume de líquido B ........ 43
Ilustração 2 - Início da medição ........ 43
Ilustração 3 - Processo de medição........ 44
Ilustração 4 - Registro da medida de volume com líquido ........ 44
Ilustração 5 - Figuras geométricas para contagem ........ 45
Ilustração 6 - Início da contagem na base binária ........ 46
Ilustração 7 - Formação da terceira ordem ........ 46
Ilustração 8 - Formação da quarta ordem ........ 47
Ilustração 9 - Comprimento da largura para ser medido ........ 48
Ilustração 10 - Processo medição ........ 49
Ilustração 11 - Registro das diferentes bases numéricas na reta numérica ........ 51
Ilustração 12 - Objeto para contagem ........ 51
Ilustração 13 - Contagem na base duodecimal ........ 52
Ilustração 14 - Contagem na base tridecimal ........ 52
Ilustração 15 - Registro do sistema duodecimal na reta ........ 53
Ilustração 16 - 1ª tarefa, operações com o sistema quaternário ........ 55
Ilustração 17 - 1ª tarefa, resultado da operação de adição ........ 55
Ilustração 18 - 1ª tarefa, resultado da operação de adição ........ 56
Ilustração 19 - 1ª tarefa, resultado da operação de subtração ........ 56
Ilustração 20 - 1ª tarefa, resultado da operação de subtração ........ 57
Ilustração 21 - 2ª tarefa, reta numérica para resolver as operações ........ 57
Ilustração 22 - 2ª tarefa, resolução da operação na reta e registro ........ 58
Ilustração 23 - 2ª tarefa, resolução da operação e construção da reta ........ 58
Ilustração 24 - 2ª tarefa, resolução da operação e construção da reta ........ 58
Ilustração 25 - 3ª tarefa, reta numérica para completar ........ 59
Ilustração 26 - 3ª tarefa, sequência da reta numérica ........ 59
Ilustração 27 - 3ª tarefa, sequência da reta numérica ........ 60
Ilustração 28 - 3ª tarefa, sequência da reta numérica ........ 60
Ilustração 29 - 4ª tarefa, números a serem comparados ........ 61
Ilustração 30 - 4ª tarefa, comparação dos números ........ 61
Ilustração 31 - 4ª tarefa, comparação dos números ........ 62
Ilustração 32 - 4ª tarefa, comparação dos números ........ 62

Ilustração 33 - 4ª tarefa, comparação dos números ............ 63
Ilustração 34 - 5ª tarefa, números para comparar ............ 63
Ilustração 35 - 5ª tarefa, comparação entre os números 32 e 30 ............ 64
Ilustração 36 - 5ª tarefa, comparação entre os números 60 e 80 ............ 64
Ilustração 37 - 5ª tarefa, números a serem comparados ............ 64
Ilustração 38 - 5ª tarefa, comparação entre os números 248 e 250 ............ 65
Ilustração 39 - 5ª tarefa, comparação entre os números 248 e 300 ............ 65
Ilustração 40 - 6ª tarefa, área com medida K, em base 4............ 66
Ilustração 41 - 6ª tarefa, construção da segunda e terceira ordem............ 67
Ilustração 42 - 6ª tarefa, verificação da medição da área com medida K............ 67
Ilustração 43 - 6ª tarefa, decomposição do número $113_{(4)}$............ 68
Ilustração 44 - 6ª tarefa, soma das parcelas ............ 68
Ilustração 45 - 7ª tarefa, números a serem comparados ............ 69
Ilustração 46 - 7ª tarefa, números a serem comparados ............ 69
Ilustração 47 - 7ª tarefa, comparação dos números ............ 69
Ilustração 48 - 8ª tarefa, operação de adição em diferentes bases numéricas ............ 70
Ilustração 49 - 8ª tarefa, resolução das operações na base quinária ............ 70
Ilustração 50 - 8ª tarefa, resolução das operações na base setenária e ternária ............ 71
Ilustração 51 - 9ª tarefa, operação para ser resolvida com base na reta numérica............ 71
Ilustração 52 - 9ª tarefa, resolução da operação $96 + 1 = ___............ 72
Ilustração 53 - 9ª tarefa, resolução da operação $99 + 1 = ___ e w99 + 1 = ___............ 72
Ilustração 54 - 9ª tarefa, resolução da operação w29 – 1 = ___ ............ 73
Ilustração 55 - 9ª tarefa, resolução da operação z00 – 1 = ___ ............ 74
Ilustração 56 - 9ª tarefa, resolução da operação ............ 74
Ilustração 57 - 10ª tarefa, segmentos a serem medidos ............ 75
Ilustração 58 - 10ª tarefa, medição do segmento $\overline{TC}$, $\overline{CB}$ e $\overline{BA}$............ 76
Ilustração 59 - 10ª tarefa, registro da medida do segmento dentro e fora quadro valor de lugar ............ 76
Ilustração 60 - 11ª tarefa, operações de adição............ 77
Ilustração 61 - 11ª tarefa, resolução das operações ............ 77
Ilustração 62 - 12ª tarefa, operação de adição e subtração ............ 78
Ilustração 63 - 12ª tarefa, resultado das operações de adição............ 78
Ilustração 64 - 12ª tarefa, resultado das operações de subtração............ 79

Ilustração 65 - 13ª tarefa, quantidade de lápis produzidos por meio do esquema das ordens..80
Ilustração 66 - 13ª tarefa, cálculo da produção de lápis em um dia ..........81
Ilustração 67 - 13ª tarefa, cálculo após a distribuição de 1024 lápis..........82
Ilustração 68 - 13ª tarefa, cálculo após a distribuição de 341 lápis..........82
Ilustração 69 - 14ª tarefa, operações a serem resolvidas ..........83
Ilustração 70 - 14ª tarefa, reescrita da operação no quadro valor de lugar e cálculo ..........83
Ilustração 71 - 14ª tarefa, reescrita da operação no quadro valor de lugar e cálculo ..........84
Ilustração 72 - 15ª tarefa, operações a serem resolvidas ..........84
Ilustração 73 - 15ª tarefa, resolução das operações de subtração ..........85
Ilustração 74 - 15ª tarefa, resolução das operações de adição ..........85
Ilustração 75 - 15ª tarefa, resolução das operações de subtração e adição..........86
Ilustração 76 - 16ª tarefa, produção das equipes por meio dos esquemas das ordens..........86
Ilustração 77 - 16ª tarefa, registro e operacionalização no quadro valor de lugar..........87
Ilustração 78 - 16ª tarefa, registro da formação de uma nova terceira ordem..........87
Ilustração 79 - 17ª tarefa, operação de adição na base numérica octogenária..........88
Ilustração 80 - 17ª tarefa, resultado da operação de adição na base octogenária ..........89
Ilustração 81 - 17ª tarefa, reagrupamento das unidades de primeira ordem..........89
Ilustração 82 - 17ª tarefa, reagrupamento a partir do esquema das ordens ..........90
Ilustração 83 - 18ª tarefa, operação de adição na base numérica setenária ..........90
Ilustração 84 - 18ª tarefa, resultado da operação de adição na base setenária..........91
Ilustração 85 - 18ª tarefa, reagrupamento a partir do esquema das ordens ..........91
Ilustração 86 - 19ª tarefa, operações de adição a serem resolvidas ..........92
Ilustração 87 - 19ª tarefa, resolução da adição, com início na terceira ordem ..........92
Ilustração 88 - 19ª tarefa, resolução da adição, com início na primeira ordem..........93
Ilustração 89 - 20ª tarefa, operações a serem resolvidas ..........94
Ilustração 90 - 20ª tarefa, resolução das operações ..........94
Ilustração 91 - 20ª tarefa, resolução das operações ..........95
Ilustração 92 - 20ª tarefa, resolução da última operação ..........95
Ilustração 93 - 21ª tarefa, operação de adição para definir o adicionador..........96
Ilustração 94 - 21ª tarefa, resolução de operações no sistema numérico octogenário..........96
Ilustração 95 - 21ª tarefa, resolução de operações em diferentes sistemas numéricos..........97
Ilustração 96 - 22ª tarefa, operações de adição a serem calculadas..........98
Ilustração 97 - 22ª tarefa, resolução das operações 453 + 283 e 35 + 192..........98
Ilustração 98 - 22ª tarefa, resolução das demais operações..........99

Ilustração 99 - 23ª tarefa, operações de adição a serem resolvidas ........................................ 99
Ilustração 100 - 23ª tarefa, adição das parcelas 347 e 193 .................................................. 100
Ilustração 101 - 23ª tarefa, resolução das operações ......................................................... 100
Ilustração 102 - 24ª tarefa, operações de adição nas bases setenária e novenal .................... 101
Ilustração 103 - 24ª tarefa, resolução das operações de adição ............................................ 101
Ilustração 104 - 25ª tarefa, operações de subtração e esquema das ordens ........................... 102
Ilustração 105 - 25ª tarefa, explicação do procedimento de resolução da operação ............. 103
Ilustração 106 - 25ª tarefa, movimento de operacionalização por meio do esquema das ordens ........................................................................................................................... 103
Ilustração 107 - 25ª tarefa, resolução da operação de subtração .......................................... 104
Ilustração 108 - 25ª tarefa, movimento de operacionalização por meio do esquema das ordens ........................................................................................................................... 104
Ilustração 109 - 26ª tarefa, operações a serem resolvidas em diferentes bases numéricas..... 105
Ilustração 110 - 26ª tarefa, resolução da subtração na base octogenária ............................... 105
Ilustração 111 - 26ª tarefa, resolução da subtração na base hexanária .................................. 106
Ilustração 112 - 27ª tarefa, operações de subtração a serem resolvidas ............................... 107
Ilustração 113 - 27ª tarefa, registro do subtraendo e resolução da operação......................... 107
Ilustração 114 - 27ª tarefa, resolução das demais operações ................................................ 108
Ilustração 115 - 28ª tarefa, operações a serem resolvidas .................................................... 108
Ilustração 116 - 28ª tarefa, resolução das operações .......................................................... 109
Ilustração 117 - 28ª tarefa, resolução das demais operações ................................................ 109
Ilustração 118 - 29ª tarefa, operações de subtração a serem resolvidas ............................... 110
Ilustração 119 - 29ª tarefa, resolução das operações de subtração ....................................... 110
Ilustração 120 - 29ª tarefa, operações que envolvem novos procedimentos de resolução ..... 111
Ilustração 121 - 30ª tarefa, operação para explicar o procedimento de resolução................. 111
Ilustração 122 - 30ª tarefa, resultado obtido por meio do esquema...................................... 112
Ilustração 123 - 31ª tarefa, operação de subtração a ser calculada....................................... 112
Ilustração 124 - 31ª tarefa, cálculo da operação por meio do algoritmo .............................. 113
Ilustração 125 - 31ª tarefa, resultado expresso por meio dos esquemas ............................... 113
Ilustração 126 - 32ª tarefa, operações a serem calculadas .................................................... 113
Ilustração 127 - 32ª tarefa, operacionalização de 7000 – 3430 ............................................ 114
Ilustração 128 - 32ª tarefa, resolução da operação 1000 – 11 .............................................. 114
Ilustração 129 - 33ª tarefa, adições a serem calculadas ....................................................... 115
Ilustração 130 - 33ª tarefa, resoluções das adições com algarismos hindu-arábicos............. 115

Ilustração 131 - 33ª tarefa, resolução das adições compostas por números abstratos ........... 116
Ilustração 132 - 34ª tarefa, subtrações e adições a serem operacionalizadas ......................... 117
Ilustração 133 - 34ª tarefa, resolução das operações que compõem a primeira coluna.......... 117
Ilustração 134 - 34ª tarefa, resolução das operações que compõem a segunda coluna .......... 118
Ilustração 135 - 34ª tarefa, resolução das operações que compõem a terceira coluna ........... 119
Ilustração 136 - Situação singular para medição .................................................................. 142
Ilustração 137 - Processo de medição.................................................................................... 142
Ilustração 138 - Grandeza comprimento para ser medida na base numérica quaternária ...... 144
Ilustração 139 - Processo de medição.................................................................................... 145
Ilustração 140 – Reta numérica na base quaternária ............................................................. 145
Ilustração 141 - Registro dos números quaternários na reta numérica.................................. 146
Ilustração 142 - Parcelas no esquema das ordens.................................................................. 150
Ilustração 143 - Resolução adição por meio do algoritmo .................................................... 151
Ilustração 144 - Adição por meio da representação das ordens ............................................ 152
Ilustração 145 - Operação de subtração................................................................................. 153
Ilustração 146 - Reagrupamento das ordens.......................................................................... 154
Ilustração 147 - Subtração no esquema das ordens ............................................................... 154
Ilustração 148 – modelo literal .............................................................................................. 155

## LISTA DE SIGLAS

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

GPEMAHC - Grupo de Pesquisa Educação Matemática: uma abordagem Histórico-Cultural

IDEB - Índice de Desenvolvimento da Educação Básica

OCDE - Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico

PCNs - Parâmetros Curriculares Nacionais

PNAIC - Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa

PNPG - Plano Nacional de Pós - Graduação

PISA - *Programme for International Student Assessment*

UEPI - Universidade Estadual do Piauí

UFSC - Universidade Federal de Santa Catariana

UNESC - Universidade do Extremo Sul Catarinense

UNIBAVE - Centro Universitário Barriga Verde

UNISUL - Universidade do Sul de Santa Catarina

**SUMÁRIO**


**1 CONTEXTUALIZAÇÃO DA PESQUISA ........ 20**

**2 AS TAREFAS DAVYDOVIANAS REFERENTES À OPERACIONALIZAÇÃO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO ........ 41**

2.1 SÍNTESE DA INTRODUÇÃO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO NA PROPOSIÇÃO DAVYDOVIANA ........ 42

2.2 OPERACIONALIZAÇAO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO NA PROPOSIÇÃO DAVYDOVIANA ........ 53

**2.2.1 Operacionalização na reta numérica ........ 54**

**2.2.2 Comparação de números ........ 60**

**2.2.3 Os valores relativos dos algarismos ........ 66**

**2.2.4 Operações com números compostos por dois algarismos ........ 68**

**2.2.5 Operações com números compostos por três algarismos ........ 71**

**2.2.6 Valores dos algarismos por meio da composição numérica ........ 75**

**2.2.7 Revisão de operações com números compostos por três algarismos ........ 78**

2.3 ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS COMPOSTOS POR VÁRIOS ALGARISMOS ........ 79

**2.3.1 Introdução do algoritmo da adição e subtração ........ 80**

**2.3.2 Adição e subtração por decomposição ........ 84**

2.4 ADIÇÃO COM REAGRUPAMENTO ........ 86

**2.4.1 Composição do algoritmo de adição com reagrupamento ........ 97**

**2.4.2 Adição com vários reagrupamentos ........ 99**

**2.4.3 Revisão da adição ........ 101**

2.5 SUBTRAÇÃO COM REAGRUPAMENTO OU TRANSFORMAÇÃO ........ 102

**2.5.1 Subtração com um reagrupamento ou transformação ........ 106**

**2.5.2 Subtração com reagrupamento ou transformação interligada ........ 108**

**2.5.3 Subtrações que envolvem novos procedimentos de resolução ........ 110**

**3 A UNIDADE ENTRE O LÓGICO E O HISTÓRICO REFERENTE AO SISTEMA DE NUMERAÇÃO E AS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO NA CONEXÃO DIALÉTICA ENTRE O UNIVERSAL, O PARTICULAR E SINGULAR ........ 120**

**4 CONSIDERAÇÕES FINAIS ........ 157**

**REFERÊNCIAS** ........ 163

**ANEXOS ........ 172**

**ANEXO A: TAREFAS DAVYDOVIANAS TAL COMO SÃO APRESENTADAS NOS LIVROS DIDÁTICOS E DE ORIENTAÇÃO ................................................................ 173**

## APRESENTAÇÃO

A presente investigação foi desenvolvida no contexto da Educação Matemática, mais especificamente para o modo de organização do ensino da Matemática com base nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural. A partir desta Teoria, Davýdov (ДАВЫДОВ) e colaboradores, tais como Gorbov (ГОРБОВ), Mikulina (МИКУЛИНА) e Savieliev (САВЕЛЬЕВА) elaboraram uma proposta para o Ensino de Matemática na Rússia com o objetivo de promover o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes. Esta constitui a fonte de dados da presente pesquisa cujo, objeto de estudo consiste na unidade entre o lógico e o histórico no movimento conceitual proposto por Davýdov e colaboradores para a operacionalização do sistema de numeração[1], na especificidade da adição e da subtração.

A opção pelo estudo da proposição davydoviana ocorre pelo entendimento de que ela pode contribuir para a reflexão sobre o atual modo de organização do ensino de Matemática no Brasil como indicam os estudos de ROSA (2012), MADEIRA (2012), ALVES (2013), CRESTANI (2013), DORIGON (2013), MATOS (2013), SILVEIRA (2012), SOUZA (2013), ROSA, DAMAZIO e ALVES (2013), ROSA, DAMAZIO e CRESTANI (2014), ROSA, DAMAZIO e SILVEIRA (2014), SILVEIRA (2014), HOBOLD (2014), SOUSA (2014), CUNHA ( 2014)[2]. Davýdov e os colaboradores elaboraram suas pesquisas voltadas ao ensino com a finalidade de desenvolver o pensamento teórico dos estudantes, como concebe a Teoria Histórico-cultural. Para tanto, contempla em sua proposição a conexão dialética, que será anunciada no primeiro capítulo, entre o universal, o particular e o singular (ROSA, 2012). O objetivo consistiu em investigar tal conexão no movimento conceitual proposto por Davýdov e colaboradores para o ensino da operacionalização do sistema de numeração. Os livros didáticos e de orientação ao professor, para o segundo ano do Ensino Fundamental, constituíram a fonte de dados.

[1] A compreensão aqui adotada para o sistema de numeração inclui as diferentes bases numéricas que o compõe e não um sistema, como por exemplo, sistema de numeração decimal.

[2] No decorrer da dissertação referenciamos algumas monografias (ALVES, 2013; CRESTANI, 2013; DORIGON, 2013; MATOS, 2013; SILVEIRA, 2012) em virtude da relevância desses trabalhos para o projeto mais amplo ao qual se insere a presente pesquisa. Vale informar que essas monografias foram desenvolvidas no interior de um grupo de pesquisa (GPEMAHC) com apoio financeiro do FUMDES (Fundo de Apoio à Manutenção e ao Desenvolvimento da Educação Superior) e apresentam reflexões importantes para a compreensão do movimento conceitual que antecede as operações da adição e subtração nas diferentes bases numéricas na proposição davydoviana.

Nesta pesquisa, de natureza teórica, adotamos o materialismo dialético como método. Durante o processo de investigação percorremos três etapas. Inicialmente nos apropriamos de cada tarefa, em seguida analisamos suas diferentes formas de desenvolvimento e finalizamos com a revelação da interconexão das mesmas. No processo de exposição da pesquisa, consideramos o procedimento do abstrato ao concreto.

A dissertação é estruturada em três capítulos, com base em quatro ações metodológicas, que não ocorreram de modo linear e nem fragmentadas. Trata-se de um movimento interconectado marcado por idas e vindas.

A primeira ação de pesquisa se refere à compreensão do método de investigação e exposição com base no materialismo dialético. Nesta etapa destacamos algumas categorias do método, para orientar-nos no processo de realização da pesquisa, como um todo. São elas: lógico, histórico, universal, particular e singular. Isso porque, ao iniciarmos o mestrado já tínhamos um objeto de estudo determinado decorrente da pesquisa que desenvolvemos durante o curso de especialização. Contudo, foi a partir do estudo do método que delimitamos o problema, o objetivo e os procedimentos de investigação e exposição, conforme apresentaremos no primeiro capítulo da presente dissertação sob o título *Contextualização da pesquisa*.

A segunda ação diz respeito à seleção, extração, organização e explicação dos dados da pesquisa que representam a totalidade do objeto em estudo. Os dados consistem nas tarefas davydovianas referentes à operacionalização da adição e subtração do sistema de numeração. Selecionamos as tarefas que representam o movimento conceitual adotado por Davýdov e colaboradores para tal operacionalização e as expomos no segundo capítulo intitulado *Apresentação e explicação das tarefas davydovianas referentes à operacionalização da adição e subtração do sistema de numeração*. Para possibilitar a compreensão da operacionalização, fez-se necessário também a elaboração de uma síntese do sistema de numeração, tal como é apresentado por Davýdov e colaboradores.

A lógica dialética, considerada por Davýdov e colaboradores ao elaborarem sua proposição de ensino, supera por incorporação, a lógica formal. Por exemplo, na especificidade da proposição davydoviana, para o ensino das operações de adição e subtração contempla-se a relação universal válida para todas as bases numéricas. Desse modo, supera as proposições que se limitam ao sistema de numeração decimal, por contemplar todas as bases, mas também dá conta dessa particularidade. Diante disso, foi necessário, mergulharmos nos fundamentos da lógica formal, que inclusive estão presentes em algumas proposições brasileiras (HOBOLD, 2014; ROSA, DAMAZIO e ALVES, 2013; ROSA, 2012) e nas orientações oficiais (BRASIL, 2014), o que justifica a relevância de uma reflexão sobre estes. O estudo dos fundamentos da lógica formal constituiu a terceira ação de pesquisa, e contribuiu para escrevermos parte do primeiro e terceiro capítulo.

A quarta ação refere-se ao estudo dos princípios da lógica dialética que, segundo Davýdov (1982), fundamenta sua proposição de ensino. Refletimos teoricamente os dados de pesquisa, descritos, explicados e analisados no segundo capítulo, com base nos fundamentos filosóficos, psicológicos, matemáticos e didáticos da Teoria Histórico-Cultural. Esta reflexão, atrelada às relações de superação da lógica formal, originou o terceiro capítulo: *A unidade entre o lógico e o histórico referente ao sistema de numeração e as operações de adição e subtração na conexão dialética entre o universal, o particular e singular*.

As quatro ações de pesquisas mencionadas nos possibilitaram atingir o objetivo ao qual nos propomos, bem como, o problema de pesquisa, que consiste em revelar a expressão da unidade entre o lógico e o histórico no movimento conceitual proposto por Davýdov e colaboradores para o ensino da operacionalização do sistema de numeração.

# 1 CONTEXTUALIZAÇÃO DA PESQUISA

> "A criança aprende a atuar no plano do sistema decimal antes de tomar consciência dele, porque ela não domina o sistema, mas é tolhida por ele" (VIGOTSKI, 2000, p. 373).

Inúmeras são as dificuldades apresentadas por estudantes de todos os níveis de ensino durante o processo de aprendizagem dos conceitos matemáticos, inclusive aqueles considerados básicos como, por exemplo, o sistema de numeração e as operações de adição e subtração. As dificuldades em tais operacionalizações são apresentadas, principalmente, por estudantes brasileiros dos anos iniciais do Ensino Fundamental em decorrência da falta de compreensão do sistema de numeração (ZATTI, AGRANIONIH e ENRICONE, 2010; NOGUEIRA e SIGNORINI, 2010; CURI, SANTOS e RABELO, 2012).

A aprendizagem da operacionalização do sistema de numeração ocorre nos limites da base decimal (SILVEIRA, 2012; SILVEIRA, ROSA e DAMAZIO, 2013; ROSA, DAMAZIO e SILVEIRA, 2014; SILVEIRA, 2014) com foco para memorização dos algoritmos, sem a devida compreensão deste (BERTINI, 2009). Uma das professoras pesquisadas por Lemos (2014, p. 119) revela que,

> Quando é a matemática de reservas, que a gente diz o pedir emprestado, eles pedem emprestado, mas depois não contam mais com aquele número, onde eles erram muito. Então tem que calcular, tem que botar bem na cabeça deles que aquilo é assim e pronto, é o método de trabalhar.

Esta falta de compreensão também se reflete no processo de resolução de problemas. Matos (2013) investigou a resolução de problemas apresentada por estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental, sobre as operações de adição e subtração. A autora constatou, entre outros, que "os estudantes cometem erros na identificação da operação correspondente ao problema. E quando identificam corretamente, às vezes erram na resolução do algoritmo" (MATOS, 2013, p. 118).

Com o intuito de solucionar algumas das fragilidades mencionadas, pesquisadores recomendam que se considerem, como ponto de partida no ensino, situações decorrentes do dia a dia dos estudantes (BARBOSA e OLIVEIRA, 2012; BELONSI *et al*., 2013). Para tanto, a sugestão consiste no seguinte movimento: "parte do conhecimento prévio do aluno, da sua realidade social e cognitiva realizando uma mediação entre esses saberes e o saber sistematizado" (SILVA, 2012, p. 50). Também há aqueles que sugerem a introdução de jogos no processo de ensino dos conceitos matemáticos. O pressuposto é que "o jogo matemático pode ser considerado como uma estratégia de ensino para a construção da aprendizagem, pois ao vencer as dificuldades e aprender a agir estrategicamente o aluno desenvolve seu ato de pensar e solucionar problemas" (PEREIRA, 2010, p. 2).

Enfim, vários são os esforços no sentido de contribuir com o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos. Entretanto, a Educação Matemática escolar brasileira ainda produz resultados pouco alentadores, conforme os dados do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA)[3], divulgado no início do ano de 2014 pela Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico (OCDE). Da mesma forma, os resultados apresentados pelo IDEB[4] revelam que o Ensino Médio e o Ensino Fundamental Anos Finais, não atingiram as metas propostas pelo governo (no Ensino Médio a nota da rede pública permaneceu em 3,4 enquanto a meta era de 3,6. Já o Ensino Fundamental Anos Finais, a meta era de 4,1, mas a nota foi 4,0). Conforme o PNPG (Plano Nacional de Pós – Graduação),

> Os efeitos decorrentes do esforço realizado pelos sistemas educacionais nas três esferas administrativas, federal, estadual e municipal apesar de terem sido importantes para melhorar a ampliação do acesso, não foram suficientes para melhorar a qualidade e nem mesmo garantir a permanência, por exemplo, no ensino médio, onde as taxas de evasão ainda são alarmantes. Assim, faz-se necessário que sejam produzidos estudos que dimensionem o verdadeiro tamanho do problema e do desafio, esclareçam as causas do insucesso e apontem soluções de curto, médio e longo prazo para a melhoria da qualidade da educação básica (BRASIL, 2011, p. 166).

Entendemos as limitações das avaliações em larga escala, mas esses resultados também são detectados em pesquisas acadêmicas desenvolvidas no âmbito nacional (NUNES

---

[3] O *Programme for International Student Assessment* (PISA) - Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - é uma iniciativa internacional de avaliação comparada, aplicada a estudantes na faixa dos 15 anos, em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países. O objetivo do PISA é produzir indicadores que contribuam para a discussão da qualidade da educação nos países participantes, de modo a subsidiar políticas de melhoria do Ensino Básico (INEP, [s. d,]).

[4] O IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica) foi criado pelo INEP em 2007, em uma escala de zero a dez. Sintetiza dois conceitos igualmente importantes para a qualidade da educação: aprovação e média de desempenho dos estudantes em Língua Portuguesa e Matemática. O indicador é calculado a partir dos dados sobre aprovação escolar, obtidos no Censo Escolar, e médias de desempenho nas avaliações do INEP, o SAEB e a Prova Brasil (INEP, [s. d,]).

NETO, MENDOZA e DELGADO, 2014; VOGADO, JUCÁ e MOTA, 2014; PEREIRA FILHO, 2012). O baixo desempenho acadêmico decorre não somente dos métodos de ensino, mas também do seu conteúdo, da lógica que fundamenta a maioria dessas proposições: a lógica formal[5] (ROSA, 2012; BRUNELLI, 2012; MADEIRA, 2012; SOUZA, 2013; SOUSA, 2014; HOLBOD, 2014). Segundo Rosa (2012), as proposições para o ensino de Matemática, apresentadas em grande parte dos livros didáticos brasileiros, aproximam-se daquela denominada por Davýdov[6] de tradicional.

A principal finalidade do ensino escolar tradicional é “inculcar nas crianças *generalizações* e *conceitos*” empíricos (DAVÝDOV, 1982, p. 14, grifos do autor). Davýdov (1982), ao analisar o material didático predominante na Rússia durante a segunda metade do século XX, constatou que o conteúdo geralmente é exposto de modo que o trabalho dos escolares com este se reverta nas correspondentes generalizações empíricas. Os manuais didáticos, de acordo com o autor em referência, descreviam brilhantemente as especificidades do processo de generalização empírico. Em um dos manuais, de autoria desconhecida, analisado por Davýdov (1982, pp. 15-16)[7], encontramos:

> Para elaborar de modo independente o conceito, antes de tudo é necessário que os alunos analisem e comparem entre si um número bastante grande de objetos iguais ou similares, especialmente selecionados e propostos pelo professor para esse fim. Ao fazer, examinam-se de modo sucessivo as qualidades particulares dos distintos objetos e determina-se em que se diferenciam uns dos outros. Tem lugar a seleção das qualidades comuns a todos os objetos… e elas determinam, afinal de contas, o conceito em forma de enumeração das mesmas inerentes a todos os objetos que entra no âmbito definido por aquele.

O processo de generalização, no ensino tradicional, ocorre por meio da passagem, da descrição das propriedades externas do objeto para separá-las em uma classe comum. Neste movimento generalizador, os estudantes destacam algumas características que se repetem nos diferentes objetos e as separam das demais, que não se repetem. Ao concluírem o

---

[5] Para aqueles que desejam aprofundar seus estudos sobre a objetivação dos princípios da lógica formal no ensino de Matemática, sugerimos a leitura de Holbod (2014).

[6] No decorrer do texto utilizaremos a grafia Davýdov, tal como é apresentada na principal obra deste autor (DAVÝDOV, 1982). Porém, quando fizermos referência às demais obras, apresentaremos tal como consta na própria obra (Davídov, Davidov, Davydov e Давыдов). Além disso, é importante informar que, nas referências das obras escritas em Espanhol, a tradução para a Língua Portuguesa foi realizada por nós.

[7] Em vários momentos, no decorrer de toda a dissertação, optamos por apresentar citações diretas para garantir com maior fidedignidade possível às ideias dos autores que fundamentam a presente pesquisa.

processo de generalização, os estudantes separam, nos objetos, as características variáveis das invariáveis e as abstraem (DAVÝDOV, 1982), tal como ocorre atualmente em algumas proposições brasileiras para o ensino de Matemática (ROSA, 2012; ROSA, DAMAZIO e ALVES, 2013; SOUSA, 2014; HOBOLD, 2014).

Para Davýdov (1982, p. 45), as características da abstração, generalização e conceito, desenvolvidas no ensino tradicional, "coincidem rigorosamente com a descrição da **lógica formal tradicional**" (grifos do autor).

Mas, em que consistem a abstração, generalização e conceito, de acordo com os fundamentos da lógica formal tradicional? O termo *generalização* na lógica forma tradicional, segundo Davýdov (1982), é utilizado para designar múltiplos aspectos do processo de apropriação dos conhecimentos pelos estudantes. A generalização formal está conectada ao processo de abstração, pois o conhecimento do geral, fixado em um signo, resulta em algo abstrato. O conceito, nesta mesma lógica, "é a forma na qual se refletem as características essenciais do objeto" (ROSENTAL, 1962, p. 233). Seu processo de formação está associado ao "simples descobrimento e separação de qualquer indício comum entre os mais diversos objetos" (KOPNIN, 1978, p. 155).

No processo de generalização empírica, "ocorre a procura e nomeação, por meio da palavra, de certo *invariante* entre a diversidade de objetos e suas propriedades [...] [como também] a identificação dos objetos na diversidade dada com a ajuda do invariante escolhido" (DAVÝDOV, 1982, p. 13). Tal processo ocorre por meio do método comparativo, a partir de uma variedade de objetos disponibilizados aos estudantes. A generalização, segundo Kopnin (1978, p. 161), é "apenas por forma e não por conteúdo", pois a abstração decorrente consiste apenas na "separação do indício comum, semelhante, sensorialmente perceptível do objeto" (KOPNIN, 1978, p. 160).

O conceito resultante, por sua vez, também é empírico, "é a combinação de dois, três ou mais traços [características] abstratos - genéricos" (DAVÝDOV, 1982, p. 19). Vale ressaltar que, mesmo na lógica formal, o conceito não é qualquer conjunto de características comuns, mas daquelas substanciais.

As características substanciais/invariantes constituem o conteúdo do conceito. Ásmus (1947, *apud* DAVÝDOV, 1982, pp. 49-50, grifos do autor), afirma que "estabelecer o conteúdo do conceito, ou seja, indicar com exatidão os indícios substanciais imagináveis no mesmo constitui uma operação lógica transcendental chamada *definição*". Esta, na lógica formal, “é a forma pela qual se refletem as características essenciais dos objetos” (ROSENTAL, 1962, p. 133).

Na lógica formal também há distinção entre dimensão concreta (relacionada aos objetos existentes, singulares e observáveis) e a abstrata (expressa o geral). Os estudantes observam e comparam os objetos semelhantes, formam uma ideia das características comuns, generalizam, elaboram definições e chegam ao conceito.

> Para criar um conceito geral, é necessário separar, abstrair dos atributos [características] próprios dos fenômenos singulares e deixar só os atributos [características] comuns a toda uma classe de fenômenos. Aplicando este procedimento de generalização, o geral se contrapõe ao singular, aos vários fenômenos singulares. No geral e no particular separa-se e estuda-se cada um por si. Deste modo, semelhante divisão e estudo por separado dos atributos [características] é importante, é indispensável para diferenciar uns objetos de outros, as características particulares do geral, da espécie de gênero, etc. Contudo, por meio dessa generalização, o geral não se apresenta como essência contraditória, como unidade do comum e do particular (ROSENTAL, 1962, p. 237).

Tal movimento consiste na passagem do sensorial ao abstrato. Trata-se de generalizações empíricas nas quais os estudantes “seguem o esquema de baixo para cima e frequentemente não garantem o movimento de cima para baixo, a passagem do geral para o particular” (DAVÝDOV, 1982, p. 29). Esse processo de generalização, característico do ensino tradicional, está relacionado com a percepção, a representação e o conceito. Assim, a generalização empírica ocorre no plano da percepção direta, das representações em nível de conceitos empíricos (DAVÝDOV, 1982).

Conforme mencionamos, a lógica formal fundamenta grande parte das proposições e orientações brasileiras (ROSA, 2012; BRUNELLI, 2012; MADEIRA, 2012; SOUZA, 2013; SOUSA, 2014; HOLBOD, 2014, BRASIL, 2014). Essa lógica, segundo Oliveira (2001, p. 14), não dá conta de “representar, no pensamento, o movimento da realidade”. Para captá-lo é necessário considerar a lógica dialética. Isto porque “as leis da lógica dialética são exatamente as leis que dirigem o movimento objetivo da realidade transformadas em leis do pensamento e que se nos apresentam através de conceitos de máxima generalidade” (OLIVEIRA, 2001, p. 14). Ademais, a lógica dialética supera a formal por incorporação. Então, por que há certo predomínio dos fundamentos da lógica formal em grande parte das proposições brasileiras?

De acordo com Mészáros (2008, p. 25), “os processos educacionais e os processos sociais mais abrangentes de reprodução estão intimamente ligados”. Isto significa que há uma conexão entre a educação em geral e o atual modo de produção capitalista. Davídov (1987) é mais enfático ao se referir à educação escolar: ele alerta que os conteúdos e os métodos de ensino são organizados para servir o referido sistema de produção. Deste modo, a principal finalidade da escola tradicional é preparar a mão de obra para o mercado de trabalho. Não há interesse, por parte dos líderes que trabalham pela manutenção do sistema vigente, em uma educação que proporcione formação sólida, que tenha, como base, a transmissão dos conceitos científicos produzidos historicamente pela humanidade, com vista ao desenvolvimento do pensamento teórico (DAVÝDOV, 1982; FRERES, RABELO e SEGUNDO, 2008).

O ensino, segundo Suchodolski (1976, p. 10) passa a ser “[...] um elemento necessário da produção [...], no capitalismo tem a tarefa exclusiva de formar forças de trabalho baratas e nunca ultrapassará os limites que os interesses da produção capitalista exigem”. O mesmo entendimento é expresso por Mészáros (2008):

> A educação institucionalizada, especialmente nos últimos 150 anos, serviu – no seu todo – ao propósito de não só fornecer os conhecimentos e o pessoal necessário à máquina produtiva em expansão do sistema do capital, como também gerar e transmitir um quadro de valores que *legitima* os interesses dominantes [...] (MÉSZÁROS, 2008, p. 35, grifos do autor).

Neste sentido, Suchodolski (1976, p. 12) também afirma que “a educação é um instrumento nas mãos da classe dominante que determina o seu caráter de acordo com os seus interesses de classe [...]”. Freres, Rabelo e Segundo (2008, p. 7) acrescentam: “o que interessa é uma educação voltada aos interesses do capital e que mantenha os trabalhadores presos às rédeas do sistema [...]”. Nesses moldes, de acordo com Fiorentini (1995), a Matemática é concebida como uma ciência neutra, reduzida a um conjunto de técnicas, regras e algoritmos. O aluno deve realizar uma série de exercícios conforme o modelo sugerido. A ênfase incide no fazer em detrimento de outros aspectos importantes, como compreender, refletir, analisar e justificar/provar.

Por outro lado, mas na mesma direção, as orientações atuais para os três primeiros anos de escolarização previstos no Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa -

PNAIC[8] salientam que

> não há necessidade de atividades sofisticadas e que demandem um excessivo tempo do professor para seu planejamento e execução. Atividades simples possuem grande potencial pedagógico desde que contribuam para aproximar situações do cotidiano a situações da sala de aula (BRASIL, 2014a, p. 25).

Tais reflexões podem ajudar na compreensão das razões que determinam um predomínio dos fundamentos da lógica formal na maioria das proposições brasileiras de ensino. Em outras palavras, é uma questão de coerência com o próprio modo de produção vigente. E esta questão torna-se ainda mais complexa, porque a "reformulação significativa da educação é inconcebível sem a correspondente transformação do quadro social no qual as práticas educacionais da sociedade devem cumprir as suas vitais e historicamente importantes funções de mudança" (MÉSZÁROS, 2008, p. 25). E agora? O que fazer? Vamos cruzar os braços e aguardar uma transformação do quadro social? De acordo com Nascimento (2014), a educação escolar "constitui uma possibilidade objetiva no processo de luta pela transformação das condições alienadoras de nossa sociedade que impedem a formação humano-genérica dos sujeitos, posto que permite elaborar e afirmar um determinado projeto de sociabilidade" (NASCIMENTO, 2014, p. 272).

Da mesma forma, Kopnin (1978, p. 228) entende que a "pesquisa autenticamente científica está imediatamente voltada para a procura de formas e ideias segundo as quais o mundo deve ser mudado". É com esta finalidade que desenvolvemos a presente pesquisa, com o foco para educação escolar. Nosso esforço é pela busca, nos estudos sobre o papel da educação, de conteúdos e métodos que possam contribuir para se pensar o projeto de construção de um novo homem, de uma nova sociedade.

Por atender tal interesse, centramo-nos no estudo da proposição davydoviana, pois preconiza uma educação comprometida "com a transformação pessoal e social do aluno" (LIBÂNEO e FREITAS, 2013, p. 316). Os projetos de Davýdov voltaram-se para a consolidação dos propósitos de outro modo de relações de produção, pois se insere no

> projeto de formação do novo homem na sociedade socialista soviética, esperava da

[8] Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa é um compromisso formal assumido pelos governos Federal, do Distrito Federal, dos estados e municípios de assegurar que todas as crianças estejam alfabetizadas até os oito anos de idade, ao final do 3º ano do Ensino Fundamental (BRASIL, [s.d.]).

> escola que ensinasse os alunos a orientarem-se com autonomia na informação científica e em qualquer outra esfera de conhecimento, ou seja, que os ensinasse a pensar dialeticamente mediante um ensino que impulsionasse o desenvolvimento mental (LIBÂNEO e FREITAS, 2013, p. 315).

Para tanto, Davýdov e Elkonin, assim como outros autores adeptos da Teoria Histórico-Cultural, elaboraram e executaram a proposta do ensino desenvolvimental conhecida como sistema Elkonin-Davýdov, com abrangência para todas as disciplinas. O ensino desenvolvimental, conforme Vygotsky é aquele que promove o desenvolvimento mental e da personalidade dos estudantes (LIBÂNEO e FREITAS, 2013). A hipótese central das pesquisas de Davýdov é que "as crianças pequenas podem desenvolver o pensamento teórico por meio da assimilação de conhecimento teórico" (LIBÂNEO e FREITAS, 2013, p. 320). Além de coordenar as investigações e o sistema como um todo com seu parceiro Elkonin, Davýdov debruçou-se, com certa atenção, ao ensino de Matemática. Sua produção consiste em uma fiel objetivação dos fundamentos da referida Teoria em uma proposição de ensino (ROSA, 2012).

A Teoria Histórico-Cultural tem como precursor Lev Semenovich Vygotski (1896-1934), líder intelectual da *troika* composta por ele, Luria e Leontiev. O desafio do grupo foi "criar uma abordagem dos processos psicológicos estritamente humanos e pôr a psicologia em bases materialistas" (PRESTES, TUNES e NASCIMENTO, 2013, p. 55). Tal desafio emergiu no contexto da Revolução Russa de Outubro (1917). Esta "pôs como tarefa primordial a formação do homem novo e de uma escola nova que iria educar esse homem que viveria na nova sociedade socialista" (PRESTES, TUNES e NASCIMENTO, 2013, p. 55).

É nesse contexto social que Davýdov e colaboradores, tais como Gorbov (Горбов), Mikulina (Микулина) e Savieliev (Савельева), desenvolveram suas pesquisas durante 25 anos nas escolas russas. O objetivo consistia em "formular uma teoria do ensino voltada para o desenvolvimento do pensamento das crianças e jovens" (LIBÂNEO e FREITAS, 2013, p. 315).

Davýdov cursou Filosofia e Psicologia na Universidade Estadual de Moscou. Seu campo de pesquisa era a Psicologia Pedagógica. Concluiu o doutorado em Psicologia no ano de 1970, sob a orientação de P. Ya. Galperin[9]. Sua tese de doutorado, *Tipos de generalización*

---

[9] Piotr Yakovlevich Galperin (1902-1988) foi médico, psicólogo, colaborador de A. N. Leontiev, professor universitário e membro da escola de Járkov, fundada pelo grupo de Vygotsky, Luria e Leontiev. Em suas pesquisas, Galperin "objetivava organizar e estruturar o ensino de forma tal que favorecesse a aprendizagem de

*en la enseñanza*, traduzida para o espanhol por Marta Shuare, é o principal fundamento da presente dissertação (DAVÝDOV, 1982). Davýdov trabalhou na Academia de Ciências Pedagógicas. No Instituto de Psicologia Geral e Pedagógica desta Academia, foi colaborador científico, chefe de laboratório e diretor (LIBÂNEO e FREITAS, 2013). Foram as pesquisas desenvolvidas neste laboratório, com Elkonin, principalmente aquelas em parceria com a escola experimental número 91, que deram "forma às bases da teoria do ensino desenvolvimental" (LIBÂNEO e FREITAS, 2013, p. 320).

Davýdov (1982) entendia que o ensino deve ser organizado de modo tal que promova o desenvolvimento do pensamento teórico. Em suas palavras,

> a estruturação moderna das disciplinas escolares [...] deve propiciar a formação, nos alunos, de um nível mais alto de consciência e de pensamento que aquele ao qual se orienta a organização até agora vigente do processo de aprendizagem na escola. Postulamos que o nível requerido é o da consciência e do pensamento teóricos modernos, cujas principais leis são evidenciadas pela dialética materialista como lógica e teoria do conhecimento [...]. O conteúdo e os métodos do ensino primário vigentes orientam-se predominantemente à formação, nos escolares dos primeiros anos, das bases da consciência e do pensamento empíricos, caminho importante, mas não o mais efetivo na atualidade, para o desenvolvimento psíquico das crianças (DAVÍDOV, 1988, p. 99).

O desenvolvimento do pensamento teórico não ocorre mediante generalizações empíricas. E imprescindível a revelação de "certa sujeição à lei, uma inter-relação necessária dos fenômenos particulares e singulares com a base geral de certa totalidade, descobrir a lei de formação da unidade interna deste" (DAVÍDOV, 1988, p. 152). Essa generalização

> não se alcança mediante a simples comparação dos traços de objetos isolados, o que é característico da generalização puramente indutiva, mas por meio da análise da essência dos objetos e fenômenos estudados; sua essência define-se precisamente pela unidade interna de sua diversidade [...] (KÉDROV, 1965 *apud* DAVÍDOV, 1988, p. 152).

A generalização puramente indutiva, fundamentada na lógica formal, predominava no ensino russo. Foi em contraposição a esse ensino que Davýdov e colaboradores organizaram uma proposição para o ensino dos conceitos matemáticos com publicação de livros didáticos e livros de orientações ao professor. Os livros didáticos

---

conceitos teóricos e científicos com potencial para o desenvolvimento do pensamento das crianças" (NÚÑEZ e OLIVEIRA, 2013, p. 293).

(ДАВЫДОВ *et al*., 2012a; ДАВЫДОВ *et al*., 2012b) e o de orientação ao professor (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009) correspondentes ao segundo ano do Ensino Fundamental constituem a fonte de dados.

O interesse pela temática da presente pesquisa teve sua origem a partir do estudo que realizamos durante o Curso de Especialização (Especialização em Educação Matemática - 2012). Durante aquele período, tivemos a oportunidade, por meio da nossa atual orientadora, de conhecer a proposição davydoviana para o ensino de Matemática. Conforme estudávamos a proposição, vislumbrávamos a possibilidade de desenvolver um estudo que possibilitasse a reflexão sobre as fragilidades do ensino brasileiro de Matemática. No trabalho de especialização, tínhamos como objetivo analisar o movimento conceitual considerado por Davýdov e colaboradores para introdução do Sistema de Numeração no segundo ano do Ensino Fundamental. Na ocasião, detectamos alguns elementos da unidade entre o lógico e o histórico.

> Nas proposições davydovianas a lógica do conceito do sistema de numeração (a formação das diferentes ordens de medidas a partir dos agrupamentos) reflete a sua história. Historicamente, os agrupamentos eram realizados nas diferentes bases. Tal procedimento é desenvolvido nas proposições davydovianas, porém sem repetir a história fielmente. Davydov e seus colaboradores não mencionam os fatos históricos, mas os refletem. Ou seja, as proposições davydovianas para o ensino do sistema de numeração transitam pela lógica comum das diversas bases numéricas particulares. O procedimento adotado é o de redução das representações caóticas ao abstrato e, posteriormente, de ascensão do abstrato ao concreto pensado, na unidade entre o lógico e o histórico (SILVEIRA, 2012, p. 107).

Os resultados obtidos na referida pesquisa nos levaram à elaboração do seguinte questionamento: como esse movimento se expressa nas operações fundamentais? Mais especificamente, como esse movimento se expressa na operacionalização do sistema de numeração? Eram estas questões que nos inquietavam quando ingressamos no Mestrado em Educação da Unisul, no primeiro semestre de 2013, e que geraram a presente pesquisa. Porém, dada a amplitude, foi necessária a delimitação do objeto de pesquisa, uma vez que são sete operações fundamentais: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação e logaritmação (CARAÇA, 1951).  Deste modo, optamos pelas duas primeiras, adição e subtração, porém, centradas no seguinte objeto de estudo: a unidade entre o lógico e o histórico no movimento conceitual proposto por Davýdov e colaboradores para a operacionalização do sistema de numeração.

A medição é uma operação que determina "uma conexão ou relação entre os números" (ALEKSANDROV, *et al*., 1976, p. 27). Medir uma grandeza, seja ela discreta ou contínua, é determinar quantas vezes ela contém a grandeza da sua espécie, que serve de unidade de medida (COSTA, 1866). Deste modo, entendemos por operacionalização o procedimento realizado com o resultado do processo de medição de grandezas discretas ou contínuas representado aritmeticamente, algebricamente ou geometricamente. Na especificidade deste, no que se refere a adição e subtração.

Conforme mencionamos, a fonte de dados da presente investigação consiste na proposição davydoviana publicada em livros didáticos e de orientação ao professor, na língua russa. A tradução dos livros de orientação ao professor para a Língua Portuguesa foi realizada por Elvira Kim, por solicitação do GPEMAHC (Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: Uma Abordagem Histórico-Cultural)[10].

As reflexões durante as reuniões do GPEMAHC, os encontros de orientação e as disciplinas[11] do mestrado possibilitaram a sustentação teórica da presente pesquisa com base nos princípios filosóficos (KOPNIN, 1978; KOSIK, 1995; ROSENTAL, 1960; ROSENTAL, 1962; ILIENKOV, 2006; LEFEBVRE, 1991; TRIVIÑOS, 1987; MARX, 2011), psicológicos (VIGOTSKI, 2000, VYGOTISKI, 1996), matemáticos (COSTA, 1866; IFRAH, 1997; EVES, 2004; BOYER, 1974) e didáticos (DAVÝDOV, 1982; DAVÍDOV, 1988; DAVÍDOV, 1987).

De acordo com as convencionais classificações, a presente pesquisa é Teórica, de abordagem qualitativa e coleta de dados bibliográfica. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 102), a pesquisa bibliográfica "se faz preferencialmente sobre documentação escrita". Esse tipo de pesquisa difere da revisão bibliográfica, "uma vez que vai além da simples observação de dados contidos nas fontes pesquisadas, pois imprime sobre eles a teoria, a compreensão crítica do significado neles existente" (LIMA e MIOTO, 2007, p. 44). Conforme as autoras,

> Não é raro que a pesquisa bibliográfica apareça caracterizada como revisão de literatura ou revisão bibliográfica. Isto acontece porque falta compreensão de que a

[10] O grupo foi fundado pelo Prof. Dr. Ademir Damazio (UNESC) e, atualmente, de acordo com o diretório de grupo de pesquisa no Brasil, tem como líderes seu fundador e a prof. Drª Josélia Euzébio da Rosa (UNISUL), sendo constituído por pesquisadores da UNESC, UNISUL, UFSC, UFPI e UNIBAVE. Seus integrantes encontram-se quinzenalmente para discussões sobre os fundamentos da Teoria Histórico-Cultural.

[11] Tópicos Especiais I: abordagem dialética nas Pesquisas Educacionais; Educação e Epistemologia; Tópicos Especiais em Educação III: Implicações da obra de Davýdov para o ensino de Matemática e Física; Fundamentos da Teoria Histórico-Cultural; Política Educacional Brasileira; Educação Brasileira: história e contextos – 2013; Seminários de Dissertação; Tópicos Especiais em Educação III: A pesquisa em Educação Matemática na Perspectiva Histórico-Cultural.

> revisão de literatura é apenas um pré-requisito para a realização de toda e qualquer pesquisa, ao passo que a pesquisa bibliográfica implica em um conjunto ordenado de procedimentos de busca por soluções, atento ao objeto de estudo, e que, por isso, não pode ser aleatório (LIMA e MIOTO, 2007, p. 38).

Contudo, é importante ressaltar que a dicotomia (qualitativo-quantitativo e teórico-prática) é antagônica ao método que adotamos, o materialismo dialético. Segundo Trivinõs (1987), aproximadamente na década de 1970 iniciou-se, na pesquisa em educação, um interesse nos aspectos qualitativos. Entre as diferentes perspectivas de entender o real, houve confrontos, e as novas propostas,

> como às vezes ocorre para os menos experientes, produziram algum nível de confusão. E sem maior reflexão eles decidiram eliminar toda possibilidade quantitativa na investigação e optar definitivamente pela exaltação do qualitativo na pesquisa em educação e em todos os aspectos possíveis de estudar no sistema educacional (TRIVIÑOS, 1987, p. 116).

Assim, abriu-se caminho "à falsa dicotomia quantitativo-qualitativo" (TRIVIÑOS, 1987, p. 116). A pesquisa qualitativa, segundo Martins (2005), possui algumas características, como o contato direto e prolongado do pesquisador com o campo de estudo; caráter descritivo; pesquisa voltada para o processo; confronto entre princípios teóricos e conteúdos apreendidos durante a pesquisa e natureza indutiva. Porém, toda pesquisa pode ser, simultaneamente, quantitativa e qualitativa (TRIVIÑOS, 1987). Isto porque

> Os marxistas afirmam que existe uma relação necessária entre a mudança quantitativa e a mudança qualitativa. E esta, como sabemos, resulta das mudanças quantitativas que sofrem os fenômenos. Mas a qualidade do objeto não é passiva. As coisas podem realizar a passagem do quantitativo ao qualitativo, e vice-versa (TRIVIÑOS, 1987, p. 118).

Deste modo, a lógica dialética própria à epistemologia marxiana não é excludente, pois não há dicotomia e incorpora a lógica formal por superação (LIMA e MIOTO, 2007). Para as autoras, no que diz respeito à oposição e à contradição,

> Não se trata de reconhecer opostos confrontados exteriormente, mas tê-los como interiores um ao outro, no que reside um dos mais importantes preceitos da lógica dialética denominado *identidade dos contrários*. Em conformidade com este princípio falamos então, na unidade indissolúvel dos opostos, o que determina saber o *objetivo como subjetivo*, o *externo como interno*, o *individual como social*, o *qualitativo como quantitativo* etc. Este é o mais absoluto significado da contraposição marxiana aos dualismos dicotômicos asseverados nos princípios de

> identidade e exclusão próprios à lógica formal (LIMA e MIOTO, 2007, p. 9, grifos das autoras).

O mesmo ocorre para os conceitos de teoria e prática. Alguns autores relacionam, por exemplo, a teoria com os conhecimentos teóricos estudados pelos professores durante a formação acadêmica, e a prática com a atividade profissional ou, ainda, a relação ao cotidiano dos estudantes (SILVA e NICOLLI, 2011; MOREIRA e DAVID, 2005). Entretanto, segundo Netto (2009, p. 5) a teoria possui uma especificidade que consiste no conhecimento teórico, este requer conhecer o "objeto tal como ele é em si mesmo, [...]. A teoria é, para Marx, a reprodução ideal do movimento real do objeto pelo sujeito que pesquisa: pela teoria, o sujeito reproduz em seu pensamento a estrutura e a dinâmica do objeto que pesquisa". Assim, para "[...] a filosofia marxista, a práxis, [...], é a ação consciente dos sujeitos que une a teoria, compreensão da realidade, à prática (trabalho criativo), transformação do mundo. Essa ação consciente tem como condição a transformação desses mesmos sujeitos" (BAPTISTA, 2010, p. 125).

Portanto, reafirmamos que a pesquisa é Teórica e de abordagem qualitativa, conforme as classificações atuais. Porém, ressaltamos que, de acordo com o método adotado, o dialético, não há dicotomia entre qualitativo-quantitativo e teórico-prático, mas uma unidade. Este "método de conhecimento, é que permite a interpretação do movimento entre os acontecimentos produzidos historicamente (a realidade objetiva) e o desenvolvimento do pensamento" (PANOSSIAN, 2014, p. 79). O método, segundo Kopnin (1978, p. 91), "é um meio de obtenção de determinados resultados no conhecimento e na prática". A adoção deste método ocorre por entendermos que, por meio dele, é possível a compreensão da realidade a qual investigaremos, ou seja, a operacionalização do sistema de numeração em Davýdov. Mas, como reproduzir no pensamento o processo de conhecer o objeto de investigação? Segundo Kosik (1995, p. 20, grifos do autor), "a distinção entre a representação e conceito, entre o mundo da aparência e o mundo da realidade, [...] é o modo pelo qual o pensamento capta a 'coisa em si'". Esse modo se realiza por meio do método de ascensão do abstrato ao concreto, pois este "é o método do pensamento" (KOSIK, 1995, p. 36).

De acordo com Kopnin (1978, p. 109), "atribui-se à dialética materialista e às suas categorias a função de método do conhecimento científico".

Para Triviños,

> O *materialismo dialético* é a base filosófica do marxismo e como tal realiza a tentativa de buscar explicações coerentes, lógicas e racionais para os fenômenos da natureza, da sociedade e do pensamento. [...] Mas o materialismo dialético não só tem como base de seus princípios a matéria, a dialética e a prática social, mas também aspira ser a teoria orientadora da revolução do proletariado. [...] O materialismo histórico é a ciência filosófica do marxismo que estuda as leis sociológicas que caracterizam a vida da sociedade, de sua evolução histórica e da prática social dos homens, no desenvolvimento da humanidade. [...] o materialismo histórico define outra série de conceitos fundamentais para compreender suas cabais dimensões, como: sociedade, formações sócio-econômicas, estrutura social, organização política as sociedade, vida espiritual, a cultura, concepção do homem, a personalidade, progresso social etc (TRIVIÑOS, 1987, p. 51, grifos do autor).

A dialética materialista, afirma Kosik (1995, p. 39), é “o método do desenvolvimento e da explicitação dos fenômenos culturais partindo da atividade prática objetiva do homem histórico”. Para Pasqualini (2010, p. 23), este método “pretende captar e reproduzir no pensamento o movimento do real”. Já para Lefebvre (1991, p. 237), o método “fornece leis que são supremamente objetivas, sendo ao mesmo tempo leis do real e leis do pensamento, isto é, leis de todo movimento, tanto no real quanto no pensamento”. Está “intimamente ligado ao fenômeno” (ARAUJO, 2012, p. 1), e a essência do fenômeno é revelada pelo método.

A partir da dialética materialista como método, foi elaborada “uma infinidade de formas inter-relacionadas, modos e procedimentos que ‘trabalham’ à base de categorias como as de abstrato e concreto, lógico e histórico, [...] análise e síntese, etc.” (KOPNIN, 1978, pp. 99-100, grifos doautor). “Elas se formaram no processo de desenvolvimento histórico do conhecimento e da prática social” (TRIVIÑOS, 1987, p. 54). “*Sob a forma de categorias refletem-se as leis mais gerais e importantes do movimento dos fenômenos no mundo*” (KOPNIN, 1978, p. 107, grifos do autor). As categorias “*constituem o dispositivo lógico do pensamento científico teórico*, que é um meio de síntese, criação de novas teorias e movimento de um conceito a outro que interpreta com mais profundidade o objeto” (KOPNIN, 1978, p. 108, grifos do autor). Neste sentido, com a finalidade de interpretar com profundidade o movimento conceitual referente à operacionalização do sistema de numeração em Davýdov, adotamos as seguintes categorias do método: lógico, histórico, universal, particular e singular.

As categorias do lógico e do histórico, segundo Rosental (1960), encontram em íntima relação, em **unidade**. Mas o que significa tal unidade? Significa que “o histórico, ou seja, o mundo objetivo em desenvolvimento determina o lógico, e no que o lógico é um reflexo[12] do histórico, é *derivado em relação a ele*" (ROSENTAL, 1960, p. 326, grifos do autor). Tal unidade "possibilita que se compreenda um determinado objeto ou fenômeno, explicitando a relação entre os seus elementos, bem como a relação entre ele e outros objetos e fenômenos dentro de um sistema integrado" (PANOSSIAN, 2014, p. 259). Para Kopnin (1978, p. 186), a unidade entre o lógico e o histórico é "[...] premissa necessária para a compreensão do processo de movimento do pensamento, da criação da teoria científica", pois "o lógico reflete não só a história do próprio objeto como também a história do seu conhecimento". Ou seja, por meio dessas categorias é possivel revelar a essência do conceito em estudo (PANOSSIAN, 2014).

A hipótese de pesquisa é que o movimento conceitual, adotado na proposição de ensino davydoviana para a operacionalização do sistema de numeração, contempla a unidade entre o lógico e o histórico. Para confirmar ou refutar tal hipótese, propomos o seguinte problema de pesquisa: Qual a expressão da unidade entre o lógico e o histórico no movimento conceitual proposto por Davýdov e colaboradores para o ensino da operacionalização do sistema de numeração?

Para Rosental (1960, p. 330), "a unidade do lógico e do histórico se expressa, também, na complexa conexão dialética existente entre o universal, o particular e o singular". Assim, o objetivo consiste em investigar a conexão dialética existente entre o universal, o particular e o singular no movimento conceitual proposto por Davýdov e colaboradores para o ensino da operacionalização do sistema de numeração.

O universal, "como essência aparece na forma de lei" (DAVÍDOV, 1988, p. 147) que, de acordo com o autor em referência, constitui uma unidade de nexos e relações essenciais, expressas por meio do modelo da relação geneticamente inicial de todo o sistema. Por universal entende-se a unidade interna dos traços, propriedades e características singulares (STERNIN, 1965). O universal "determina o surgimento e o desenvolvimento de outros fenômenos particulares e singulares dentro de determinado todo" (DAVÍDOV, 1988, p. 144-145). A conexão entre essência universal e sua expressão singular é mediatizada pela particularidade (ROSA, 2012).

---

[12] "O reflexo é o resultado da atividade subjetiva que parte da fonte objetiva e conduz à imagem cognitiva, superando por conteúdo qualquer objeto ou processo tomado separadamente. Só sob essa concepção do reflexo pode-se entender porque o conhecimento se converte em instrumento da atividade prática transformadora do homem" (KOPNIN, 1978, p. 124).

Como afirma Kopnin (1978, p. 108),

> o universal implica a riqueza do singular e do particular no sentido de que, apreendendo as leis, ele está refletindo, nessa ou naquela medida, todos os casos particulares de manifestação do singular. Sem compreender a dialética do *universal* e do *singular* nas categorias, é impossível descobrir a essência e a relação destas com os conceitos de outras ciências.

O "conceito é resultado da abstração do singular e do particular, da revelação do universal no singular e a fixação desse último [singular] em nosso pensamento" (STERNIN, 1965, p. 272). A "concretização dos conhecimentos teóricos consiste na dedução e explicação das manifestações particulares e singulares do sistema integral a partir de seu fundamento universal" (DAVIDOV, 1988, pp. 154-155). Deste modo, as categorias universal, particular e singular são propícias para análise do movimento conceitual proposto por Davýdov e colaboradores para o ensino da operacionalização do sistema de numeração na especificidade da adição e subtração.

Em concernência com o método de pesquisa adotado, consideramos a distinção apresentada por Marx "entre o método da investigação e o método da exposição" (KOSIK, 1995, p. 37). O método de investigação requer que o movimento seja estruturado "tendo como centro as categorias mais ricas em determinações e relações" (BERGAMO e BERNARDES, 2006, p. 184). Neste sentido, durante o desenvolvimento da presente investigação, percorremos três etapas previstas por Kosik (1995, p. 37, grifos do autor):

> 1) minuciosa apropriação da matéria [do objeto], pleno domínio do material, [...];
> 2) análise de cada forma de desenvolvimento do próprio material;
> 3) investigação da coerência interna, isto é, determinação da unidade das várias formas de desenvolvimento.
> Sem o pleno domínio de tal método de *investigação*, qualquer dialética não passa de especulação vazia.

Na primeira etapa estudamos todo o material da proposta davydoviana referente ao primeiro e segundo ano do Ensino Fundamental. O estudo possibilitou a identificação e seleção das tarefas referentes à operacionalização do sistema de numeração. Na sequência, resolvemos as tarefas e reproduzimos o movimento de resolução em slide no *Power Point*®. Finalizamos essa primeira etapa com o desenvolvimento das tarefas organizadas nos slides com um grupo de professores. O desenvolvimento das tarefas davydovianas com os professores possibilitou-nos uma melhor compreensão da estrutura de tal proposição e do movimento conceitual subjacente à mesma. Portanto, conforme Moura *et al*. (2010, p. 208), "é na relação do sujeito com o meio físico e social, mediada por instrumentos e signos (entre eles a linguagem), que se processa o seu desenvolvimento cognitivo". Nessa direção, Kosik (1995, p. 28, grifos do autor) afirma que,

> O homem, para conhecer as coisas em si, deve primeiro transformá-las em coisas para si; para conhecer as coisas como são independentemente de si, tem primeiro de submetê-las à própria *práxis*: para poder constatar como são elas quando não estão em contacto consigo, tem primeiro de entrar em contacto com elas. O conhecimento não é contemplação. A contemplação do mundo se baseia nos resultados da *práxis* humana. O homem só conhece a realidade na medida em que ele cria a realidade humana e se comporta antes de tudo como ser prático.

Assumpção (2011, p. 10), com base em Marx, afirma que a práxis "não significa somente referência ao pensamento teórico nem somente à ação prática, [...] a ação apresenta-se como uma condição do conhecimento, e este, por sua vez, uma condição para a ação". Para Kosik (1995, p. 28, grifos do autor), "não é possível compreender imediatamente a estrutura da coisa ou a coisa em si mediante a contemplação ou a mera reflexão, mas sim, mediante a uma determinada *atividade*". Assim, a opção pelo desenvolvimento das tarefas davydovianas com os professores "passa necessariamente por uma postura ativa do sujeito diante do objeto de conhecimento e, portanto, implica uma dimensão prática da atividade" (MORETTI, 2007, p. 83). Vale dizer que não relatamos, na presente dissertação, o processo de desenvolvimento das tarefas com os professores, pois este não é o foco da pesquisa. Esses professores não são sujeitos da pesquisa, mas colaboraram com o processo de compreensão do objeto de estudo. Entendemos que não é possível analisarmos as tarefas além de sua aparência sem resolvê-las nos contexto da práxis.

A operacionalização do sistema de numeração referente à adição e subtração ocorre nas diferentes bases numéricas. A análise do movimento operacional correspondente a cada base numérica constituiu a segunda etapa da pesquisa. Na terceira etapa, investigamos a interconexão das diferentes bases numéricas no processo de operacionalização da adição e subtração, desencadeada pelas tarefas davydovianas.

O investigador, de acordo com Chagas (2011), deve apropriar-se do objeto em seus detalhes, analisar suas diferentes formas de desenvolvimento. Neste sentido, só foi possível apresentar o movimento real da proposição davydoviana para a operacionalização do sistema de numeração depois de concluído o processo de apropriação das tarefas que compõem a mesma.

Somente após um prolongado processo de estudo, no qual compreendemos a base interna das diferentes bases numéricas, é que foi possível selecionar o sistema de tarefas para compor o segundo capítulo, que é parte resultante da investigação. Para Kosik (1995, pp. 37-38, grifos do autor), "aquilo de onde a ciência inicia a própria exposição já é *resultado* de uma investigação e de uma apropriação crítico-científica da matéria. O início da exposição já é um início *mediato*, que contém em embrião a estrutura de toda a obra". Na especificidade do objeto, trata-se da totalidade do movimento conceitual referente à proposição davydoviana para operacionalização do sistema de numeração, expresso por meio de tarefas particulares interconectadas. A totalidade "como ponto de partida orienta o processo de conhecimento, o caminho que vai do abstrato ao concreto e do concreto ao abstrato [...]" (JIMÉNEZ, 2006, p. 92).

No segundo capítulo, expomos e explicamos as tarefas necessárias para reflexão teórica, que apresentamos no terceiro capítulo. Como ensina Araújo (2003, p. 5), o "método de exposição só é possível depois de um longo percurso de investigação, que exige trabalho analítico rigoroso". Além disso, em coerência com o método dialético, a exposição não se limita à simples descrição, mas contempla a explicação. Trata-se da análise explicativa em detrimento da descritiva (VIGOTSKI, 2000). Como "resultado da análise explicativa, alcança-se a verdadeira concreticidade do fenômeno, atinge-se o *concreto pensado"* [...] (PASQUALINI, 2010, p. 24, grifos do autor). Neste sentido, Davídov (1988, p. 173) assevera:

> A exposição do conhecimento científico realiza-se pelo procedimento de ascensão do abstrato ao concreto, em que se utilizam as abstrações e generalizações substanciais e os conceitos teóricos.
> A investigação inicia-se com o exame da diversidade sensorial concreta dos tipos particulares do movimento do objeto e dirige-se para a revelação de sua base interna universal. A exposição dos resultados da investigação, tendo o mesmo conteúdo objetivo [tarefas davydovianas], desenvolve-se a partir, dessa base universal, já encontrada, para a reprodução mental de suas manifestações particulares, conservando a unidade interna destas (o concreto).

O processo de desenvolvimento da terceira etapa culminou com a elaboração do terceiro capítulo. Trata-se do estudo sobre a coerência interna das várias formas de operacionalização; porém, no terceiro capítulo, na unidade do lógico e do histórico, por meio da análise do movimento conceitual expresso na conexão dialética existente entre o universal, o particular e singular.

Partimos do pressuposto que a unidade entre o lógico e o histórico e a conexão dialética entre o universal, o particular e o singular determinam, juntamente com outros aspectos, o movimento conceitual desencadeado no desenvolvimento das tarefas davydovianas. Kosik (1995, p. 36, grifos do autor) afirma que “o caminho entre a ‘caótica representação do todo’ e a ‘rica totalidade da multiplicidade das determinações e das relações’ coincide com a compreensão da realidade”. A realidade “é o ponto de partida da intuição e da representação, configurando uma unidade/totalidade em estado caótico” (BERGAMO e BERNARDES, 2006, p. 183). Para conhecer, compreender e explicar o todo é necessário fazer um “*detóur*: o concreto torna-se compreensível através da mediação do abstrato [...]” (KOSIK, 1995, p. 36, grifos do autor). Para Ilienkov (2006, p. 151) conhecer “é ver a realidade no que esta tem de concreta; porém, a este objetivo se chega unicamente mediante a abstração, ou seja, longe do concreto. Nisso reside a profundíssima contradição do processo do conhecer”.

Vale lembrar que a realidade que pretendemos apreender, por meio do procedimento de ascensão do abstrato ao concreto, consiste na proposição davydoviana para o ensino da operacionalização do sistema de numeração referente à adição e subtração. A reprodução teórica do concreto “como unidade do diverso se realiza pelo procedimento de ascensão do abstrato ao concreto” (DAVÍDOV, 1988, p. 141). Esse procedimento tem base em Marx, ao afirmar que

> Parece ser correto começarmos pelo real e pelo concreto, pelo pressuposto efetivo; [...]. Considerado de maneira mais rigorosa, entretanto, isso se mostra falso. [...] O concreto é concreto porque é síntese de múltiplas determinações, portanto, unidade da diversidade. Por essa razão, o concreto aparece no pensamento como o processo de síntese, como resultado, não como ponto de partida, não obstante seja o ponto de partida efetivo e, em consequência, também o ponto de partida da intuição e da representação. [...] o método de ascensão do abstrato ao concreto é somente o modo do pensamento de apropriar-se do concreto, de reproduzi-lo como um concreto mental. Mas de forma alguma é o processo de gênese do próprio concreto (MARX, 2011, pp. 54-55).

O abstrato e o concreto, afirma Davídov (1988, p. 144), “são momentos do desmembramento do próprio objeto, da realidade mesma, refletida na consciência e, por isso, são derivados do processo da atividade mental”. Para Kopnin (1978), o abstrato e o concreto, "são categorias da dialética materialista elaboradas para refletir a *mudança* da imagem cognitiva tanto no que concerne à multilateralidade da abrangência do objeto nessa imagem quanto à profundidade da penetração na essência dele" (KOPNIN, 1978, p. 154, grifos do autor). Tais categorias "expressam as leis da mudança que se opera no conteúdo do conhecimento ao longo de toda a sua evolução" (KOPNIN, 1978, p. 154).

O concreto, segundo Ilienkov (2006, p. 152), "não é só a integridade de uma coisa ou de um fenômeno, mas a integridade dos nexos e relações da coisa e do fenômeno com outras coisas e fenômenos, de suas concatenações [...]". Na especificidade do objeto de estudo, o concreto não é só o movimento conceitual decorrente do desenvolvimento do sistema de tarefas apresentado no segundo capítulo. Também os nexos e relações deste com o movimento lógico histórico expresso na conexão dialética entre o universal, particular e o singular e suas concatenações com os processos de abstração, generalização, pensamento, entre outros, ou seja, suas múltiplas determinações.

O concreto no conhecimento, segundo Ilienkov (2006, p. 153), "é um todo reproduzido no pensar; o abstrato não é mais que uma parte unilateral de um todo". A diferença entre o abstrato e o concreto é relativa, pois o concreto, em uma conexão, pode ser abstrato, e em outra, o contrário. O nível alcançado no processo de análise do objeto é determinante no que será considerado abstrato ou concreto. Estas "categorias, como contrárias, passam de uma a outra no curso da cognição" (ILIENKOV, 2006, p. 153).

O concreto, durante o processo de investigação, surge duas vezes: inicialmente como ponto de partida da contemplação e, posteriormente, como reunião das abstrações. Para atingir o conhecimento concreto, o objeto é "tomado em unidade com o todo, [...] examinado na sua relação com outras manifestações, com sua essência, com a origem universal (lei) [...]" (DAVÍDOV, 1988, p. 151). No processo de análise, o objeto é investigado em desenvolvimento. Deste modo, o concreto, no processo de cognição, ocorre "ao começo e ao fim, [...] no ponto inicial do processo e no ponto final" (ILIENKOV, 2006, pp. 158-159). Em ambos os momentos, o concreto "não é o mesmo"; porém, "a realidade é uma e existe como realidade concreta, como unidade da diversidade", mas "no processo de cognição, o concreto nas diferentes etapas - ao princípio e ao final do processo - não é o mesmo" (ILIENKOV, 2006, p. 159).

Inicialmente, o concreto real aparece ao homem "como o que é dado sensorialmente" (DAVÍDOV, 1988, p. 141). O "sensorial concreto é apenas o ponto de partida e não o ponto supremo do conhecimento"; este "não pode passar imediatamente do sensorial-concreto ao concreto no pensamento" (KOPNIN, 1978, p. 158). O concreto ponto de chegada não se apresenta como "um conjunto caótico de aspectos e relações, mas como uma unidade 'organizada', subordinada a determinadas leis" (ILIENKOV, 2006, p. 160, grifos do autor). Nas palavras de Kopnin (1978, p. 162), o concreto ponto de chegada "não é a retomada do concreto inicial, sensorial, mas o resultado da ascensão de um novo concreto, mais substancial".

O percurso de ida começa no real, no objeto a ser aprendido. Conforme nos apropriamos de suas relações internas, vamos tecendo o caminho de volta, "[...] vamos construindo nossa síntese, agora, no nível ideal do concreto do qual partimos" e "estaremos, assim, diante do mesmo real concreto, [...] não mais caótico, mas um concreto pensado, conhecido na sua totalidade" (ARAÚJO, 2003, p. 7). Consideramos totalidade não como a simples soma das partes, mas como nos ensina Ilienkov (2006), o resultado de múltiplas relações que se dão entre as bases numéricas, contempladas nas tarefas davydovianas para o ensino da operacionalização do sistema de numeração e que conformam determinado movimento conceitual. Apresentamos essas múltiplas relações no terceiro capítulo por meio das categorias lógico, histórico, universal, particular e singular e suas conexões com abstração, generalização, conceito e pensamento, e finalizamos com as considerações finais.

# 2 AS TAREFAS DAVYDOVIANAS REFERENTES À OPERACIONALIZAÇÃO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO

> A tomada de consciência do sistema decimal, isto é, a generalização, que redunda na sua compreensão como caso particular de qualquer sistema de cálculo, leva à possibilidade de ação arbitrária nesse e em outro sistema. O critério de tomada de consciência reside na possibilidade de passagem para qualquer outro sistema, pois isto significa generalização do sistema decimal, formação de um conceito geral sobre os sistemas de cálculo (VIGOTSKI, 2000, p. 373).

Neste capítulo apresentamos um sistema de tarefas da proposição davydoviana para o ensino da operacionalização do sistema de numeração, na especificidade dos conceitos de adição e subtração. Selecionadas as tarefas que representam o movimento conceitual adotado por Davýdov e colaboradores para a operacionalização do sistema de numeração. Isso não significa que contemplamos todas as tarefas que constituem o livro didático para o segundo ano do Ensino Fundamental (ДАВЫДОВ *et al*., 2012a; ДАВЫДОВ *et al*., 2012b), mas aquelas que representam a totalidade desse movimento.

Segundo Gorbov, Mikulina e Savieliev (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009), a organização das tarefas propicia que o estudante não siga modelos, mas proceda com independência e os revele. Portanto, de acordo com os princípios dessa proposição, o objetivo do ensino é desenvolver conceitos e não apenas o saber prático. Há também tarefas que não possuem resolução imediata, assim como outras que necessitam de novos conhecimentos. Essas são propostas para possibilitariam o controle e avaliação do processo de aprendizagem por parte do professor. Nesse processo, o professor organizará a discussão, cometerá “erros”, defenderá resolução erradas e, com isso, ao rejeitar tais “erros”, os estudantes são instigados a apresentar argumentos.

A proposição davydoviana para o ensino de matemática é desenvolvida a partir de um sistema conceitual que se inicia com a relação entre grandezas que dá origem ao conceito de número. Assim, não seria possível apreender o conceito de adição e subtração do sistema de numeração sem a compreensão da lógica interna desse sistema. Pois, segundo Moretti (1999, p. 27) “O entendimento do funcionamento dos sistemas de numeração é fundamental na compreensão dos algoritmos e mesmo na realização das operações básicas”.

O sistema de numeração na proposição davydoviana foi nosso objeto de estudo em pesquisas anteriores (SILVEIRA, 2012; SILVEIRA, ROSA e DAMAZIO, 2013; ROSA, DAMAZIO e SILVEIRA, 2014; SILVEIRA, 2014). Na oportunidade, selecionamos e extraímos tarefas dos livros didático (ДАВЫДОВ *et al*., 2012a) e de orientação ao professor (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009) para o ensino do referido conceito. A pesquisa que gerou a presente dissertação é continuidade de nossos estudos anteriores; porém, agora, na especificidade da adição e subtração. Contudo, pressupomos como necessária uma síntese do sistema de numeração tal como é apresentado em Davýdov, conforme segue a próxima seção.

## 2.1 SÍNTESE DA INTRODUÇÃO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO NA PROPOSIÇÃO DAVYDOVIANA

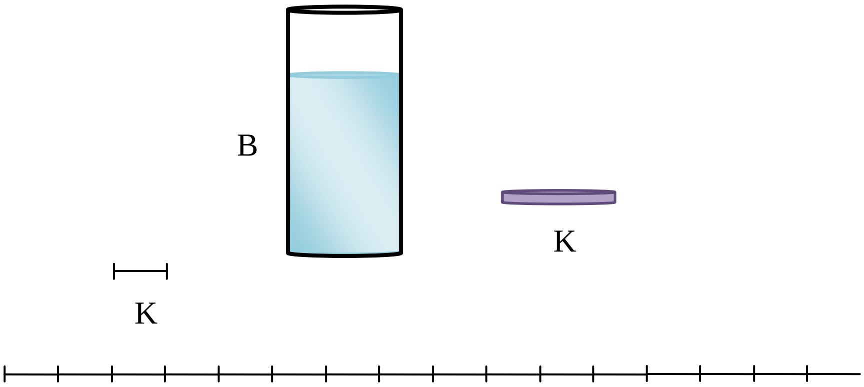
Na proposição de Davýdov e colaboradores, o sistema de numeração é revelado a partir de diversos sistemas particulares, como o sistema ternário, quinário, decimal, entre outros. Inicialmente, a revelação ocorre por meio de bases numéricas menores e de modo aleatório. Isso porque as bases menores possibilitam as devidas transformações durante a ação objetal. A introdução do sistema é realizada “a partir do elo que inter-relaciona a lógica das diferentes bases numéricas, ou seja, a partir da formação das diferentes ordens de medidas, por meio dos agrupamentos” (SILVEIRA, 2012, p. 107).

Iniciaremos a exposição da síntese da proposição davydoviana para o ensino do sistema de numeração com uma situação que consiste em medir o volume de líquido (B) e representar tal processo no esquema de segmentos[13]. A unidade de medida (K) a ser utilizada está indicada na ilustração 1. Porém, há uma condição: a medição ocorrerá na base numérica quinária.

---

[13] Vale esclarecer que esse modo de representação é familiar aos estudantes que já desenvolveram as tarefas anteriores da proposição davydoviana referentes ao primeiro ano escolar.

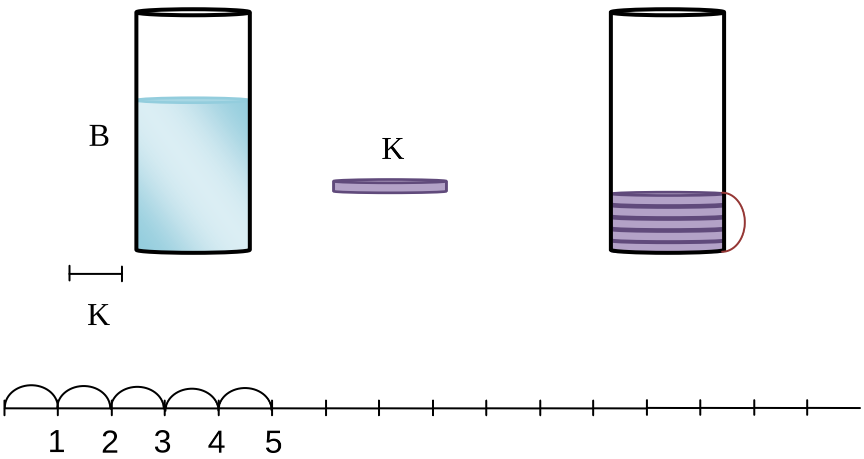
Ilustração 1 – A medição do volume de líquido B




Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Como a base numérica considerada é a quinária, a contagem na formação dos agrupamentos será sempre até cinco (Ilustração 2).

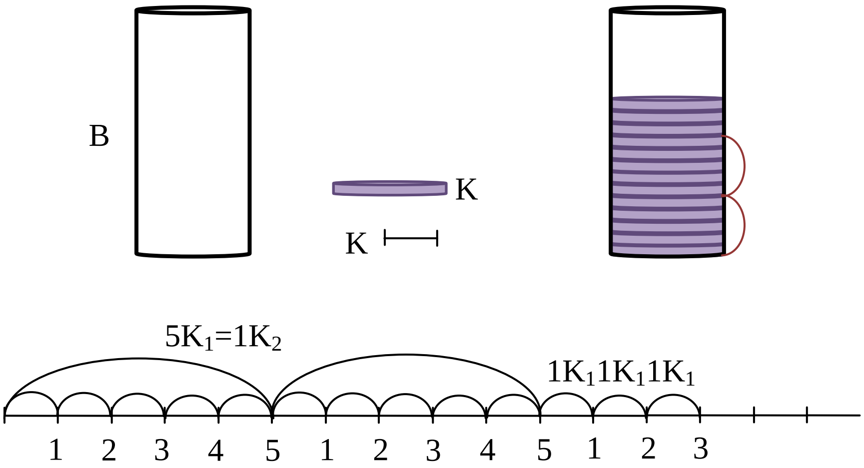
Ilustração 2 - Início da medição




Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Formamos *um* agrupamento composto por *cinco* unidades (K). Como ainda há líquido a ser medido, é necessário continuar a medição (Ilustração 3). Deste modo, iniciaremos novamente a contagem a partir de uma unidade.

Ilustração 3 - Processo de medição




Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

No decorrer do processo de medição, conforme ilustração 3, formaram-se dois agrupamentos com cinco unidades ($K_2$) e sobraram três unidades ($K_1$). Na continuidade do desenvolvimento da tarefa, registraremos o resultado desta medição. Para tanto, utilizaremos o quadro valor de lugar (Ilustração 4). Cada agrupamento de cinco unidades forma uma unidade de medida, chamada de segunda ordem ($5K_1 = 1K_2$), e as restantes que não formaram agrupamentos são de primeira ordem ($3K_1$). No quadro valor de lugar, as letras e seus subscritos, $K_2$ e $K_1$, serão substituídas pelos algarismos romanos II e I, respectivamente.

Ilustração 4 - Registro da medida de volume com líquido

| | II | I | |
|---|---|---|---|
| B | 2 | 3 | (5) |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Para registrar o valor resultante da medição fora do quadro valor, é necessário utilizar dois algarismos e informar a base numérica considerada[14], $23_{(5)}$: duas unidades de

[14] É necessário registrar entre parênteses a base numérica considerada, a partir da formação do número composto por dois algarismos, exceto a base dez (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2009).

medida de segunda ordem, cada uma composta por cinco unidades e três de primeira, que não formaram agrupamentos, na base quinária (5).

Segundo Ifrah (1997), a lógica do sistema de numeração deve-se ao fato de que, historicamente, houve a convenção de

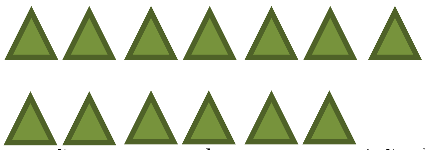
> [...] uma ‘escala’ a partir da qual é possível repartir os números e seus diversos símbolos segundo estágios sucessivos, aos quais se pode dar os respectivos nomes: *unidades de primeira ordem, unidades de segunda ordem, unidades de terceira ordem*, e assim sucessivamente. E é dessa maneira que se chegou a uma simbolização estruturada dos números, evitando-se esforços de memória ou de representação considerável (IFRAH, 1997, p. 48, grifos do autor).

Esta lógica, de acordo com o autor em referência, é chamada de *princípio da base*, e “sua descoberta marcou o nascimento dos *sistemas de numeração* – sistemas cuja ‘base’ nada mais é do que o número de unidades que é necessário agrupar no interior de uma ordem dada para formar uma unidade de ordem imediatamente superior” (IFRAH, 1997, p. 48, grifos do autor).

Na continuidade dessa síntese, apresentaremos a mesma quantidade de unidades para ser agrupada, porém, relacionada à grandeza discreta e outra base numérica, uma vez que o desenvolvimento da proposição davydoviana para ensino do sistema de numeração ocorre a partir da utilização de grandezas contínuas (volume, área, massa, comprimento da largura/altura) e discretas.

Deste modo, propomos a contagem das figuras geométricas de forma triangular, no sistema numérico binário (Ilustração 5). A unidade de medida é um triângulo, o registro do processo de contagem ocorrerá no quadro valor de lugar e também fora dele.

Ilustração 5 - Figuras geométricas para contagem



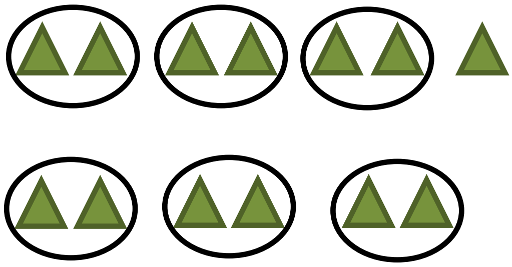
| IV | III | II | I |
|---|---|---|---|
| | | | |

(2)

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Como a base numérica indicada ao lado direito do quadro é a binária (2), os agrupamentos serão compostos por duas unidades cada, conforme ilustração 6.

Ilustração 6 - Início da contagem na base binária

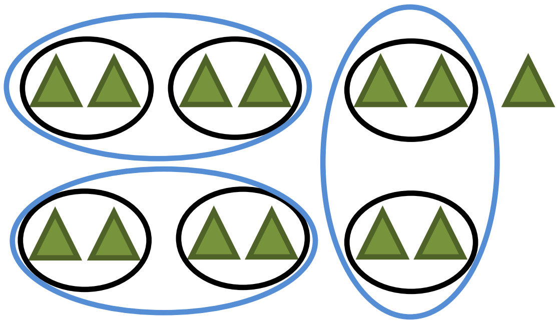


| IV | III | II | I | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | (2) |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Da formação dos agrupamentos compostos por duas unidades cada, resultaram seis grupos e sobrou uma unidade sem ser agrupada. Esta foi registrada no quadro valor de lugar, como uma unidade de primeira ordem (Ilustração 6), diferentemente das demais, pois, como registrar seis unidades de medida de segunda ordem em um sistema numérico que permite agrupar somente até dois? Surge então, a necessidade de formar a terceira ordem de medida, ou seja, reagrupar as unidades de medida de segunda ordem (Ilustração 7).

Ilustração 7 - Formação da terceira ordem

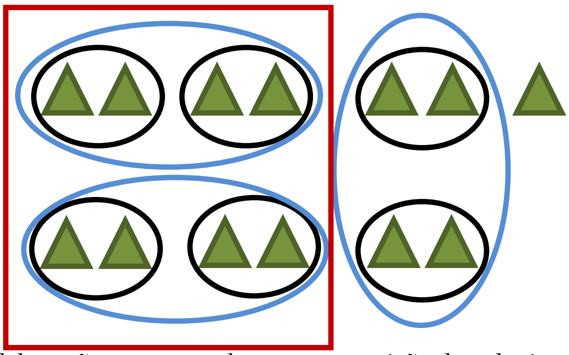


| IV | III | II | I | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | (2) |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Ao reagrupar as unidades de medida de segunda ordem, obtivemos três unidades de medida de terceira ordem e não sobrou nenhuma de segunda. Como mencionamos, não é possível registrar, no sistema binário, três unidades (neste caso, três unidades de terceira ordem). É necessário reagrupá-las e, assim, formar a unidade de medida de quarta ordem (Ilustração 8).

Ilustração 8 - Formação da quarta ordem



| IV | III | II | I |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | 1 |

(2)

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A contagem das figuras geométricas resultou em *uma* unidade de medida de quarta, *uma* de terceira e *uma* de primeira ordem. Todas as de segunda ordem foram reagrupadas. Assim, podemos concluir que cada ordem é formada, a partir da ordem inferior, tantas vezes é o valor da base numérica considerada. Rosa, Damazio e Silveira (2014) afirmam que,

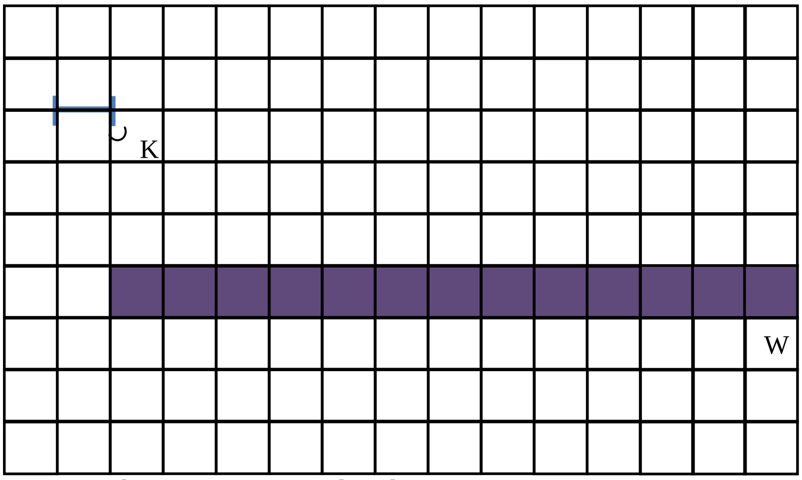
> Para reproduzir o processo de construção das diferentes ordens, em uma determinada base numérica, é necessário revelar as propriedades internas do Sistema de Numeração, por meio de suas mútuas relações e conexões. Em outras palavras, genericamente, a unidade de medida de segunda ordem é *n* vezes a unidade de medida de primeira ordem e a unidade de medida de terceira ordem é *n* vezes a de segunda ordem. Portanto, a base considerada é *n* (ROSA, DAMAZIO e SILVEIRA, 2014, no prelo).

Neste sentido, o registro da contagem dos objetos (Ilustração 8) fora do quadro valor de lugar resultou em: *um* e *um* e *um* na base binária: $111_{(2)}$. Porém, neste registro só existe até a terceira ordem, enquanto no quadro valor de lugar a quarta ordem também foi ocupada. Como explicitar a diferença existente entre os registros? Existe um espaço vazio no quadro valor de lugar, é necessário representá-lo na escrita em linha e, para isso, utiliza-se o algarismo zero. Deste modo, *uma* unidade de medida de quarta, *uma* de terceira, *uma* de primeira e *nenhuma* de segunda ordem, é assim registrada: $1101_{(2)}$.

Historicamente, conforme o sistema posicional foi se desenvolvendo, a humanidade necessitou de um símbolo que representasse "as unidades faltantes; assim, comandada por um uso estrito e regular dessa regra, a descoberta do zero marcou a etapa decisiva de uma revolução sem a qual não se poderia imaginar o progresso da matemática, das ciências e das técnicas modernas” (IFRAH, 1997, p. 685). Gundlach (1992) afirma que não seria possível o sistema de numeração posicional “funcionar adequadamente sem um símbolo para uma posição ou lugar vazio” (GUNDLACH, 1992, p. 11). Para Costa (1866), a importância do algarismo zero consiste no fato deste ser comum a todos os sistemas de numeração, pois ele e o algarismo um (1) representam sempre a base numérica. Por exemplo, no sistema binário a base é $10_{(2)}$, ternário $10_{(3)}$, duodecimal $10_{(12)}$, no decimal 10, assim como os demais sistemas.

Vale lembrar que a mesma quantidade de grandezas diferentes (grandeza contínua/volume de líquido e grandeza discreta/triângulos), apresentada no início do desenvolvimento da tarefa, foi agrupada na base numérica quinária, e resultou em duas ordens de medidas $23_{(5)}$, enquanto na binária formaram-se quatro ordens de medidas $1101_{(2)}$. A obtenção destes resultados ocorreu porque foram utilizadas diferentes bases numéricas. A quantidade de ordens dependerá do valor a ser contado ou medido, e também da base numérica considerada (SILVEIRA, ROSA e DAMAZIO, 2013). Prosseguimos a síntese por meio da medição do comprimento da largura do retângulo apresentado na malha quadriculada (Ilustração 5). A unidade de medida (K) corresponde a uma unidade de comprimento da malha, e a medição ocorrerá no sistema numérico decimal.

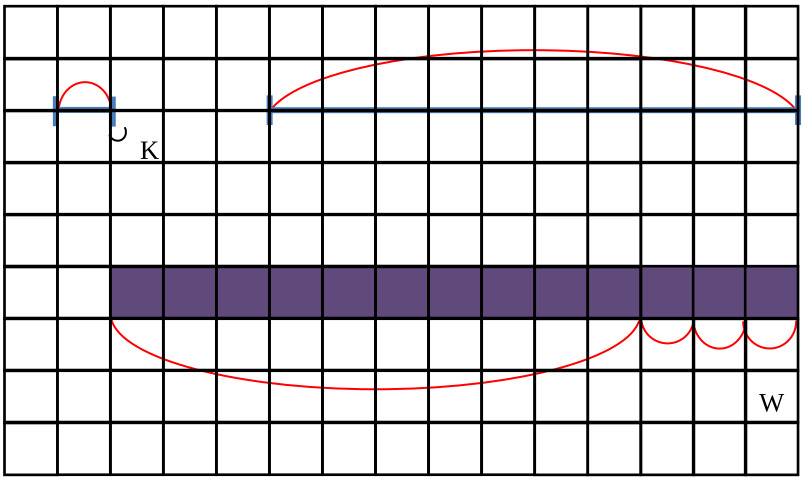
Ilustração 9 - Comprimento da largura para ser medido




Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

É possível, primeiramente, compormos a unidade de medida de segunda ordem, pois a construção desta pode ser realizada no plano teórico, sem a medição objetal. Cada ordem será tantas vezes for o valor da base, a de ordem inferior. Assim, como a base é a decimal, a unidade de medida de segunda ordem, será dez vezes a de primeira ordem (Ilustração 10).

Ilustração 10 - Processo medição




Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A medição do comprimento da largura do retângulo (W) ocorreu após a construção da unidade de medida de segunda ordem (Ilustração 10). Neste processo foi utilizada uma unidade de medida de segunda ordem e três de primeira. O registro da medição é constituído por dois algarismos (13) e, como a base numérica utilizada foi a decimal, não é necessário registrá-la em subscrito, como nas demais. Isto porque a base decimal é a mais utilizada pela humanidade, embora tenha surgido posteriormente à binária e à ternária (BOYER, 1974). De acordo com o autor, tal ênfase se deve ao fato de o homem possuir dez dedos nas mãos. Como “Aristóteles observou há muito tempo, o uso difundido do sistema decimal é apenas o resultado do acidente anatômico de que quase todos nós nascemos com dez dedos nas mãos e nos pés” (BOYER, 1974, p. 3). Para Formin (1995, pp. 3-4), “as razões pelas quais o sistema decimal foi universalmente aceito não são, nem de longe, de natureza matemática: os dez dedos das mãos constituíram a primeira máquina de calcular empregada pelo homem desde os tempos pré-históricos”. Foi o “cálculo com base nos dedos das mãos que deu origem ao sistema que nos parece agora completamente natural” (FORMIN 1995, p.

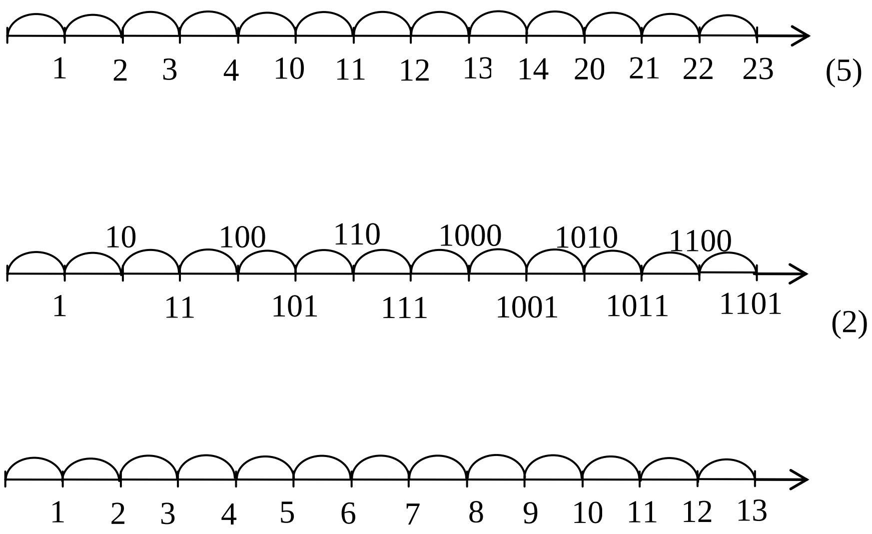
4). “Não é verdade que o nome *digito*, que designa os números naturais de 1 a 9, vem do *latim digitus* que significa dedo? Mas, há mais: - a base do nosso sistema de numeração é 10, número de dedos das duas mãos” (CARAÇA, 1951, p. 5, grifos do autor).

Na proposição davydoviana, o sistema de numeração é desenvolvido a partir da lógica interna das diferentes bases numéricas. A origem destas ocorreu por meio da necessidade vivenciada pela humanidade de “[...] designar números elevados com o mínimo possível de símbolos [...]” (IFRAH, 1997, p. 48). A solução para este problema foi formar agrupamentos (de cinco em cinco, de dez em dez...). Portanto, o sistema decimal é uma particularidade do sistema de numeração, assim como os demais (quinário, binário, etc...).

> A tomada de consciência do sistema decimal, isto é, a generalização, que redunda na sua compreensão como caso particular de qualquer sistema de cálculo, leva à possibilidade de ação arbitrária nesse e em outro sistema. O critério de tomada de consciência reside na possibilidade de passagem para qualquer outro sistema, pois isto significa generalização do sistema decimal, formação de um conceito geral sobre os sistemas de cálculo (VIGOTSKI, 2000, p. 373).

O sistema de numeração possui uma lógica interna que é válida para todas as bases numéricas que o compõem. A composição de cada ordem de medida é determinada pela base numérica a ser considerada. Assim, a partir da primeira, cada ordem será **n** vezes a anterior (**n** é a base considerada). A base numérica determina o valor máximo que cada ordem poderá conter, pois, cada vez que esse valor for atingido, formará uma nova ordem. A partir dessa conexão interna do sistema de numeração é possível registrar cada sistema numérico particular na reta numérica. Na especificidade deste, apresentaremos o registro da quantidade considerada na medição e na contagem realizada anteriormente, na reta numérica, do sistema quinário, binário e decimal, respectivamente (Ilustração 11).

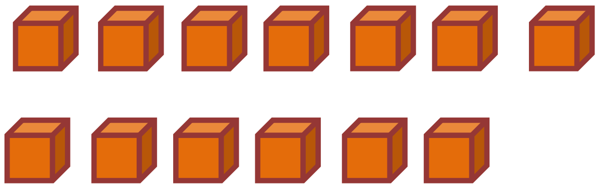
Ilustração 11 - Registro das diferentes bases numéricas na reta numérica




Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A lógica interna do sistema de numeração nos possibilita ir além da base numérica decimal. A título de ilustração, utilizaremos a base numérica duodecimal (12) e a tridecimal (13), para proceder a contagem da mesma quantidade considerada até o momento (Ilustração 12). A unidade de medida de primeira ordem é a discreta: um cubo.

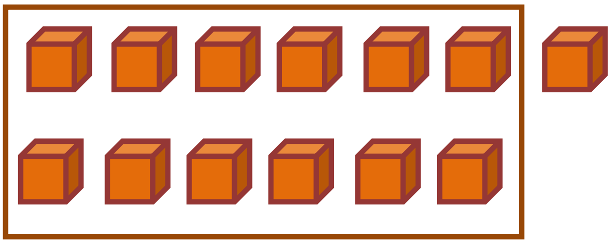
Ilustração 12 - Objeto para contagem



Fonte: Elaboração nossa, 2014.

Iniciaremos a contagem dos cubos pela base numérica duodecimal. Os agrupamentos serão compostos por doze unidades, conforme ilustração 13.

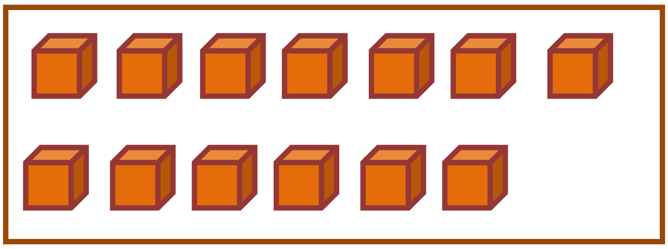
Ilustração 13 - Contagem na base duodecimal



Fonte: Elaboração nossa, 2014.

O processo de contagem resultou em um grupo com doze objetos e sobrou um objeto (Ilustração 13); isto é, *uma* unidade de medida de segunda ordem e *uma* de primeira $11_{(12)}$. A mesma quantidade será também considerada na base (13) tridecimal (Ilustração 14).

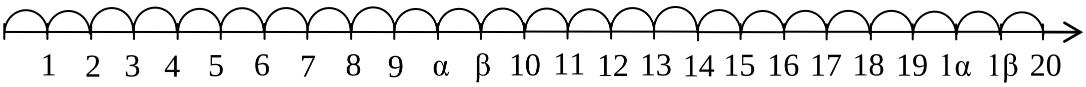
Ilustração 14 - Contagem na base tridecimal



Fonte: Elaboração nossa, 2014.

Conforme a ilustração 14, obtivemos *um* agrupamento composto por treze unidades, ou seja, $10_{(13)}$. Como mencionamos, o número 10 (*uma* unidade de medida de segunda ordem e *nenhuma* de primeira) representa a base numérica utilizada. Vale ressaltar que, para a utilização de bases maiores que a base dez, são necessários símbolos que representam os números compreendidos entre dez e o valor da base considerada. Por exemplo, para o sistema duodecimal, Costa (1866, p. 22) utiliza as letras do alfabeto grego, "α para representar dez" e "β para representar onze". Com a determinação dos símbolos é possível a representação deste sistema na reta numérica, conforme ilustração 15.

Ilustração 15 - Registro do sistema duodecimal na reta




Fonte: Elaboração nossa, 2014.

De modo análogo, ocorre para a base tridecimal, assim como para as demais. Costa (1866) afirma que "o número de sinais, figura ou algarismos diferentes, de cada sistema de numeração denomina-se base do sistema" (COSTA, 1866, p. 18). Ou seja, treze (13) figuras ou algarismos diferentes referem-se ao sistema de numeração tridecimal.

As simbologias necessárias para os sistemas de numeração superiores ao decimal não foram determinadas. Isto ocorre devido ao uso frequente da base decimal, portanto, foram estabelecidos pela humanidade apenas os dez símbolos.

Como mencionamos inicialmente, na proposição davydoviana, o sistema de numeração é introduzido a partir da lógica interna das diferentes bases numéricas. Tal lógica consiste na formação das diferentes ordens de medida. Esta formação depende do valor da base e da unidade de medida de primeira ordem. Assim, cada nova unidade de ordem superior é formada pelo produto entre o valor da base e o da ordem imediatamente inferior. Esta lógica nos possibilitou proceder a contagem para além da base decimal (duedecimal e tridecimal), pois tal lógica é válida para todo o sistema de numeração (SILVEIRA, 2012; SILVEIRA, ROSA e DAMAZIO, 2013; ROSA, DAMAZIO e SILVEIRA, 2014; SILVEIRA, 2014).

## 2.2 OPERACIONALIZAÇAO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO NA PROPOSIÇÃO DAVYDOVIANA

Após a exposição da síntese para a introdução do sistema de numeração, apresentaremos algumas das tarefas que Davýdov e colaboradores propõem para o ensino da operacionalização do referido sistema. Vale esclarecer que a primeira tarefa selecionada não coincide com a primeira da proposição davydoviana sobre adição e subtração. Desde o primeiro ano escolar as ideias fundamentais são contempladas (ALVES, 2013). O recorte, na presente pesquisa, consiste nas operações de adição e subtração nas diferentes bases numéricas.

O movimento de exposição segue do seguinte modo: primeiramente apresentamos a tarefa tal como consta no livro didático davydoviano para o segundo ano do Ensino Fundamental (ДАВЫДОВ *et al*., 2012a; ДАВЫДОВ *et al*., 2012b). Posteriormente, descrevemos e explicamos cada tarefa, conforme preconiza o livro de orientação ao professor (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА 2009). Este último foi escrito em forma de relato de experiência, com base nos resultados obtidos durante os 25 anos de desenvolvimento do ensino experimental. Por isso, em determinados momentos são explicitadas algumas ações a serem desenvolvidas pelos professores e estudantes no processo de resolução das tarefas. Vale reafirmar que não selecionamos todas as tarefas do livro didático davydoviano, mas aquelas que nos possibilitaram contemplar a totalidade do movimento conceitual inerente à operacionalização do sistema de numeração, referente à adição e à subtração.

Como Davýdov e colaboradores organizaram sua proposição de ensino com base no sistema conceitual, em certos momentos o leitor poderá sentir a necessidade de outras informações que não são diretamente relacionadas ao nosso objeto de estudo. Caso isso ocorra, sugerimos leituras de outras pesquisas sobre o tema (EUZÉBIO, 2011; ROSA, 2012; MADEIRA, 2012; SILVEIRA, 2012; ALVES, 2013; MATOS, 2013; DORIGON, 2013; CRESTANI, 2013; SOUZA, 2013; ROSA, DAMAZIO E ALVES, 2013; SILVEIRA, ROSA e DAMAZIO, 2013; ROSA, DAMAZIO e SILVEIRA, 2014; SILVEIRA, 2014; ROSA, DAMAZIO e CRESTANI, 2014; HOBOLD, 2014). Além disso, no anexo I, as tarefas são expostas conforme apresentas no livro didático, com as respectivas orientações ao professor.

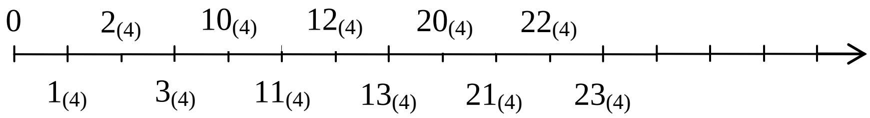
### 2.2.1 Operacionalização na reta numérica

**1ª Tarefa** (Ilustração 16): Determine, por meio da reta numérica, os resultados das seguintes operações (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009):

Ilustração 16 - 1ª tarefa, operações com o sistema quaternário

$$12_{(4)} + 1 = \square_{(4)} \qquad 20_{(4)} - 2 = \square_{(4)}$$

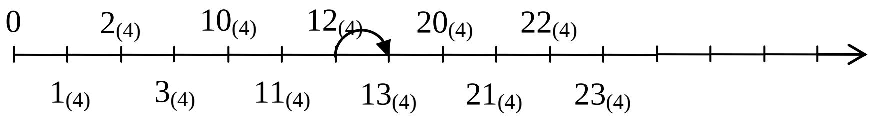
$$13_{(4)} + 1 = \square_{(4)} \qquad 23_{(4)} - 2 = \square_{(4)}$$




Fonte: Давыдов *et al*. (2012a, p. 87).

As operações de adição e subtração apresentadas na ilustração 16 serão realizadas na base numérica quaternária. Para auxiliar os estudantes neste processo, o professor sugere a utilização da reta numérica, conforme prevê o enunciado da tarefa. Vale ressaltar que, na operação de adição, os deslocamentos ocorrem para a direita e, na subtração, para a esquerda (Ilustração 17):

Ilustração 17 - 1ª tarefa, resultado da operação de adição

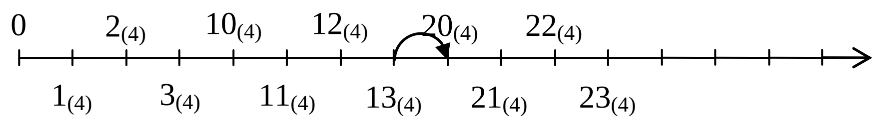



$$12_{(4)} + 1 = 13_{(4)}$$

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

De acordo com a ilustração 17, a operação indica a adição de uma unidade a *um e dois na base quatro* $12_{(4)}$. Na reta numérica, isto significa o deslocamento em uma unidade para a direita, a partir do ponto correspondente ao número $12_{(4)}$. O resultado desse movimento consistiu em $13_{(4)}$, *uma* unidade de medida de segunda ordem e *três* de primeira. A determinação do resultado possibilitou seu registro na operação após o sinal de igualdade. A próxima operação a ser realizada também é de adição (Ilustração 18):

Ilustração 18 - 1ª tarefa, resultado da operação de adição



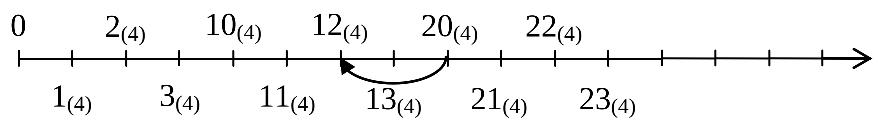

$$13_{(4)} + 1 = 20_{(4)}$$

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A solução da operação apresentada na ilustração 18 ocorreu de modo análogo à anterior (Ilustração 17). A partir do número $13_{(4)}$, deslocamos uma unidade para a direita na reta numérica. O resultado obtido foi *duas* unidades de medidas de segunda ordem na base quaternária: $20_{(4)}$. Vale lembrar que a formação de uma nova ordem é determinada pelo valor da base numérica. Na especificidade da operação em análise, a base numérica considerada foi a quaternária. Deste modo, três unidades de primeira ordem, mais uma unidade resultam em quatro unidades. As quatro unidades de medida de primeira ordem formam uma nova unidade de segunda ordem.

Na continuidade da presente tarefa, a proposição consiste na operação de subtração (Ilustrações 19 e 20):

Ilustração 19 - 1ª tarefa, resultado da operação de subtração

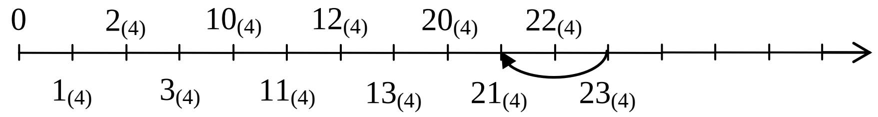



$$20_{(4)} - 2 = 12_{(4)}$$

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Diferentemente da operação de adição, na subtração ocorre o inverso, o deslocamento na reta numérica é para a esquerda. O resultado da operação $20_{(4)} - 2 = 12_{(4)}$ (Ilustração 19), é obtido pelo deslocamento, a partir do número $20_{(4)}$, (este número se refere ao adicionando da operação), duas unidades pela reta para a esquerda. Desse procedimento culminou em $12_{(4)}$. O mesmo ocorre na próxima operação, conforme ilustração 20:

Ilustração 20 - 1ª tarefa, resultado da operação de subtração




$$23_{(4)} - 2 = 21_{(4)}$$

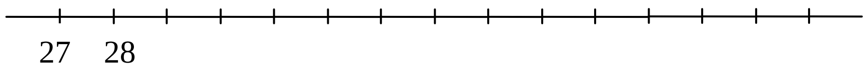
Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Ao subtrair duas unidades de $23_{(4)}$, deslocamos duas unidades para a esquerda na reta numérica (Ilustração 20). Para finalizar, registramos o resultado, $21_{(4)}$, após o sinal de igualdade.

**<u>2ª Tarefa</u>** (Ilustração 21): Resolva as operações na reta numérica e registre os resultados (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009):

Ilustração 21 - 2ª tarefa, reta numérica para resolver as operações

$28 + 1 = \boxed{\phantom{00}}$ $\quad$ $28 + 2 = \boxed{\phantom{00}}$ $\quad$ $32 - 1 = \boxed{\phantom{00}}$

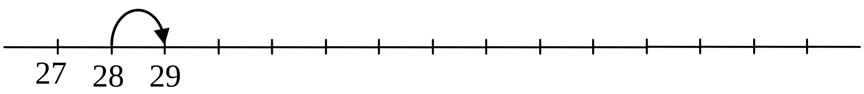



Fonte: Давыдов *et al*. (2012a, p. 87).

Para a resolução da tarefa apresentada na ilustração 21, o professor sugere a realização das operações na reta numérica e, posteriormente, o registro do resultado na reta e na operação, após o sinal de igualdade (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). Quando não há indicação da base numérica, significa que foi considerada a base decimal. Na sequência apresentamos a primeira operação da tarefa (Ilustração 22):

Ilustração 22 - 2ª tarefa, resolução da operação na reta e registro

$28 + 1 = \boxed{29}$

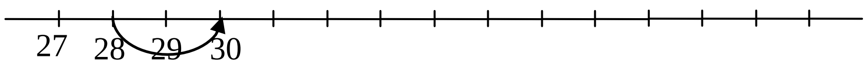



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Ao adicionar uma unidade à primeira parcela (28) obtivemos, como resultado, o número *vinte e nove* (29). Posteriormente, este número foi registrado na reta numérica, e, também na sentença (Ilustração 22). Na ilustração 23, a próxima operação, consiste em adicionar duas unidades:

Ilustração 23 - 2ª tarefa, resolução da operação e construção da reta

$28 + 2 = \boxed{30}$

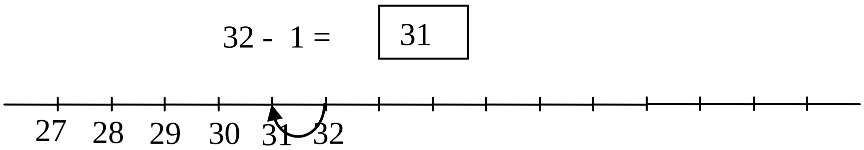



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

O resultado proveniente da operação (Ilustração 23) foi duas dezenas e dez unidades, o que requer a formação de uma nova ordem. Portanto, as dez unidades resultantes da adição entre *oito* e *dois* formam *uma* dezena que, adicionada às outras *duas*, resulta em *três* dezenas: 30 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). Marcamos na reta numérica apenas o número *trinta* (30), porque o *vinte e nove* (29) foi registrado na situação anteriormente apresentada (Ilustração 22).

Para resolvermos a última operação, primeiro registraremos os números *trinta e um* (31) e *trinta e dois* (32) na reta numérica (Ilustração 24); na sequência, procederemos ao movimento na reta e o registro do resultado. Este movimento se difere daquele realizado nas ilustrações 22 e 23. Antes, conforme determinávamos o valor da operação, registrávamos na reta. Na situação em destaque, primeiro registramos os números na reta para depois operá-los.

Ilustração 24 - 2ª tarefa, resolução da operação e construção da reta

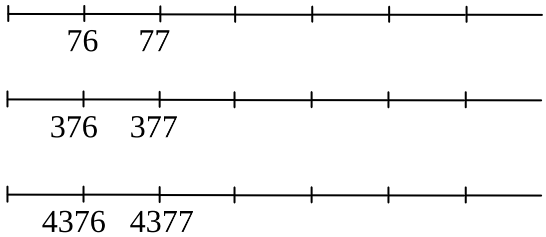



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Para solucionar a operação 32 – 1 = ___, deslocamos uma unidade na reta para a esquerda (Ilustração 24). Este movimento resultou em *trinta e uma* unidades (31).

**<u>3ª Tarefa</u>** (Ilustração 25): Complete os números que faltam nas retas numéricas (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009):

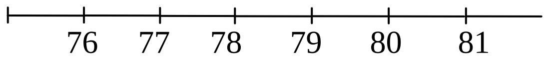
Ilustração 25 - 3ª tarefa, reta numérica para completar




Fonte: Давыдов *et al*. (2012a, p. 87).

O modo pelo qual os números são apresentados indica que se trata da base numérica decimal. Assim, sempre que agruparmos dez unidades, formaremos uma nova dezena. Na primeira reta, os números são compostos por dois algarismos. A leitura da composição numérica possibilitará o registro dos demais (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009):

Ilustração 26 - 3ª tarefa, sequência da reta numérica

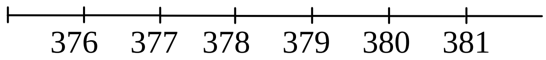



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

No registro do resultado que surge a partir da adição de uma unidade ao número *setenta e nove*, houve reagrupamento das unidades, pois as dez unidades formam uma dezena.

Às sete dezenas compostas, adicionamos a nova dezena que totaliza oito delas (Ilustração 26). A composição da sequência numérica referente à próxima reta (Ilustração 27) se difere da anterior (Ilustração 26) pela quantidade de ordens. Os números serão constituídos por três ordens que, no sistema de numeração decimal, são denominados de centenas:

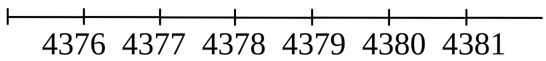
Ilustração 27 - 3ª tarefa, sequência da reta numérica




Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Na ilustração 27, embora os números sejam compostos por três ordens, também houve a formação de uma nova dezena (379 + 1), isto porque as dez unidades agrupadas compõem uma nova dezena (380). O mesmo ocorrerá no registro da próxima sequência numérica (Ilustração 28):

Ilustração 28 - 3ª tarefa, sequência da reta numérica




Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

O reagrupamento das unidades, em dezenas, ocorreu na formação da sequência numérica em todas as retas. Porém, com a diferença no que se refere à quantidade de ordens. Os números da primeira (Ilustração 26), segunda (Ilustração 27) e terceira reta (Ilustração 28) são formados por dois, três e quatro algarismos, respectivamente, ou, duas, três e quatro ordens (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). Com isso se estuda, além da formação de uma nova unidade de segunda ordem, o seu valor numérico.

### 2.2.2 Comparação de números

**4ª tarefa** (Ilustração 29): Complete as retas numéricas e compare os números (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009):

Ilustração 29 - 4ª tarefa, números a serem comparados

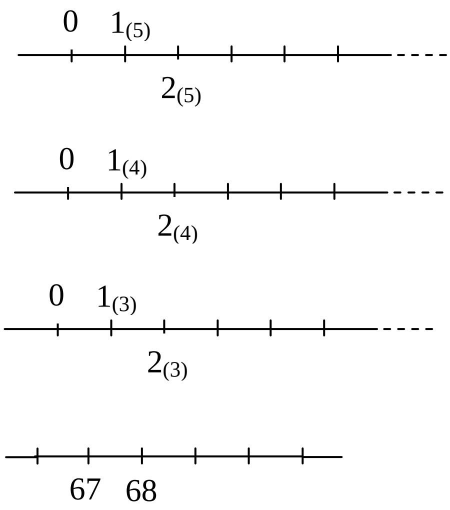
$10_{(5)} \ldots 12_{(5)}$

$20_{(4)} \ldots 13_{(4)}$

$12_{(3)} \ldots 100_{(3)}$

69 ... 70

71 ... 66

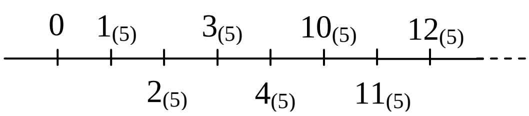



Fonte: Давыдов *et al*. (2012a, p. 89).

Para realização da tarefa, registraremos os demais números em cada reta numérica. O desenvolvimento desta se inicia a partir da primeira comparação proposta: $10_{(5)}$ ___ $12_{(5)}$, conforme ilustração 30. Ao identificarmos qual dos dois números é o maior, consideraremos a distância de ambos até o algarismo zero (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009):

Ilustração 30 - 4ª tarefa, comparação dos números

$10_{(5)} < 12_{(5)}$

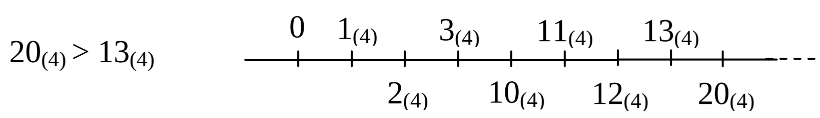



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A base numérica que determina a sequência dos números na reta, apresentada na ilustração 30, é a quinária. Vale lembrar que o sistema de numeração é composto por várias bases numéricas, estas são determinadas pela quantidade que compõe cada agrupamento. Na especificidade da sequência em análise (Ilustração 30), os agrupamentos são compostos por cinco unidades, ou seja, cada agrupamento com cinco unidades forma uma nova ordem. A partir desta lógica, registramos os números que faltavam na reta numérica a fim de determinar qual dos números ($10_{(5)}$ e $12_{(5)}$) é maior. Quanto mais distante do zero, no sentido positivo, o número estiver localizado na reta numérica, maior ele será.

Por meio da reta numérica, concluímos que o número mais distante do algarismo zero é o $12_{(5)}$, portanto é o maior. A próxima reta da tarefa é constituída pela sequência numérica quaternária (Ilustração 31):

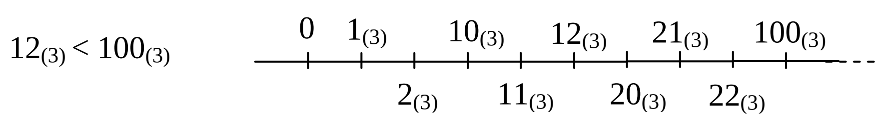
Ilustração 31 - 4ª tarefa, comparação dos números




Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A análise dos números $20_{(4)}$ e $13_{(4)}$, na reta numérica (Ilustração 31), possibilitou concluir que $20_{(4)}$ é o maior, uma vez que este está localizado mais distante do algarismo zero. O mesmo ocorre na próxima reta numérica, na qual os números a serem comparados são do sistema ternário (Ilustração 32):

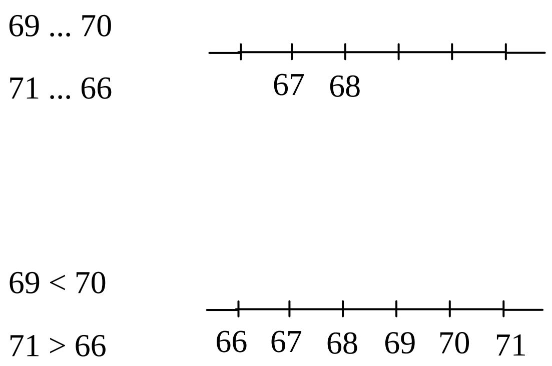
Ilustração 32 - 4ª tarefa, comparação dos números




Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A composição dos números apresentados na reta foi até a terceira ordem (Ilustração 32). Reafirmamos que a formação de uma nova ordem, superior, é **n** vezes a ordem anterior, e **n** é o valor da base numérica considerada. Na sequência numérica em análise, a terceira ordem, é composta por três vezes a de segunda ordem. Após averiguação do registro dos números na reta numérica, podemos asseverar que o número $100_{(3)}$ é o maior. A seguir, concluiremos a tarefa em referência com a comparação de números da base dez (Ilustração 33):

Ilustração 33 - 4ª tarefa, comparação dos números




Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Diferentemente das retas anteriores (Ilustrações 30, 31 e 32), o ponto inicial agora apresentado não é o zero (Ilustração 33). Contudo, podemos identificar os números desconhecidos por meio da relação entre antecessores e sucessores (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). O registro dos números faltantes possibilitou a constatação de que o número setenta é maior que sessenta e nove, assim como o número setenta e um é maior que o sessenta e seis.

**5ª tarefa** (Ilustração 34): Compare os números e indique o maior (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 34 - 5ª tarefa, números para comparar

| | | | |
|---|---|---|---|
| 32 ... 30 | 60 ... 80 | 248 ... 250 | 248 ... 300 |

Fonte: Давыдов *et al*. (2012a, p. 89).

A resolução da tarefa requer a comparação dos números e a indicação do maior (Ilustração 34); porém, no plano mental, diferentemente das tarefas anteriores, nas quais a reta numérica orientava a análise por meio da percepção visual (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). Iniciaremos com a comparação dos dois primeiros números apresentados na tarefa (Ilustração 35):

Ilustração 35 - 5ª tarefa, comparação entre os números 32 e 30

$\boxed{32 > 30}$

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A reflexão sobre a sequência numérica, localizada em uma reta imaginária, nos levou a concluir que o número trinta e dois é maior que o trinta (Ilustração 35), pois o número *trinta e dois* é o mais distante do algarismo zero e, portanto, é o maior. O resultado da comparação entre os números é registrado com o sinal de > (maior). O mesmo procedimento ocorrerá na próxima comparação (Ilustração 36):

Ilustração 36 - 5ª tarefa, comparação entre os números 60 e 80

$\boxed{60 < 80}$

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A posição do número *sessenta*, na sequência numérica, antecede ao número *oitenta*. Este se localiza mais distante do zero e, portanto, é o número maior. Para o registro do resultado da comparação, foi utilizado o sinal de < (menor), conforme a ilustração 36. De modo análogo, ocorrerá na próxima situação; porém, com uma diferença no que se refere à quantidade de ordens que compõem os números a comparar (Ilustração 37):

Ilustração 37 - 5ª tarefa, números a serem comparados

$\boxed{248 \ ... \ 250}$

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Davýdov e colaboradores sugerem que o professor apresente o seguinte questionamento, aos estudantes: o número *duzentos e quarenta e oito* (248) é maior que o *número duzentos e cinquenta* (250), uma vez que *oito* é maior que *zero*? (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Em uma comparação, se consideramos os algarismos isolados, podemos cometer equívocos. Todas as ordens que compõem um número devem ser analisadas conjuntamente. Por exemplo, o número *duzentos e cinquenta* (250) possui nenhuma unidade de primeira ordem, mas é composto por cinco unidades de segunda ordem; enquanto o número *duzentos e quarenta e oito* (248) possui apenas quatro unidades de segunda ordem. Por isso, *duzentos e cinquenta* é o maior (Ilustração 38):

Ilustração 38 - 5ª tarefa, comparação entre os números 248 e 250

$$\boxed{248 < 250}$$

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Outra operação das relações numéricas de maior menor e igual seria, agora, comparar que 50 > 48, que se caracteriza como referência para a própria decisão de que numero é maior ou menor, pois, a quantidade de unidade de terceira ordem é a mesma. Por fim, procedemos o registro do resultado com o sinal de < (menor), conforme apresentamos na ilustração 38. De modo similar, para a relação entre os números *duzentos e quarenta e oito* e *trezentos* (Ilustração 39):

Ilustração 39 - 5ª tarefa, comparação entre os números 248 e 300

$$\boxed{248 < 300}$$

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

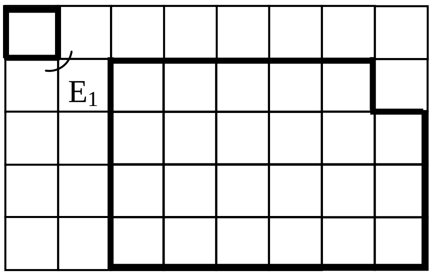
A análise da composição dos números 248 e 300, levará a conclusão de que o primeiro contém mais unidades de primeira e segunda ordem. Ainda assim, o número *trezentos* é maior, pois possui três centenas (três unidades de terceira ordem), enquanto *duzentos e quarenta e oito* é composto por apenas duas unidades de terceira ordem (Ilustração 39).

Caso os estudantes não tenham dificuldade em realizar as duas últimas comparações apresentadas na tarefa em estudo, Davýdov e colaboradores propõem, ainda, a comparação entre os números 1111 e 555 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). O algarismo *cinco* é maior que *um*: porém, a análise consiste nos números como um todo, e não em algarismos isolados. Assim, *quinhentos e cinquenta e cinco* é menor que *mil cento e onze*, pois este possui quatro ordens, uma a mais que o número *quinhentos e cinquenta e cinco*.

### 2.2.3 Os valores relativos dos algarismos

**6ª tarefa** (Ilustração 40): Verifique se o resultado da medição está correto e identifique a ordem com maior e menor valor (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009):

Ilustração 40 - 6ª tarefa, área com medida K, em base 4



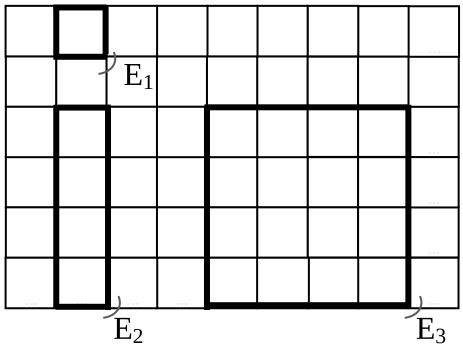

$K = 113_{(4)}$

Fonte: Давыдов *et al*. (2012a).

O registro do processo de medição da área com medida **K**, apresentado na ilustração 40, é *um* e *um e três* na base quatro: $113_{(4)}$. A tarefa incide na análise deste resultado e, também, na identificação da ordem maior e menor. O número ($113_{(4)}$) é composto por três ordens. Davýdov e colaboradores sugerem que o professor exponha o seguinte questionamento aos estudantes: a ordem maior é a de primeira, porque possui três unidades, enquanto que as demais possuem só uma unidade? (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Para responder a questão, iniciaremos o desenvolvimento da tarefa em estudo pela construção das ordens de medida (Ilustração 41). Para isso, é considerado que o processo de medição da superfície **K** ocorreu no sistema de numeração quaternário, e a unidade de medida é uma unidade de área da malha (Ilustrações 40). A partir da lógica do sistema de numeração quaternário, a unidade de medida de segunda ordem é *quatro* vezes a de primeira ordem (quatro unidades); e a de terceira ordem, *quatro* vezes a de segunda (dezesseis unidades), conforme apresentamos na ilustração 41:

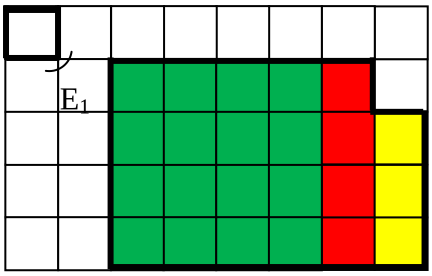
Ilustração 41 - 6ª tarefa, construção da segunda e terceira ordem




Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Após a construção da segunda e terceira ordem (Ilustração 41), procederemos à verificação do registro ($113_{(4)}$). Para tanto, pintaremos, na superfície em análise (Ilustração 42), a área correspondente à terceira ordem de verde, a segunda de vermelho, e a primeira de amarelo (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009):

Ilustração 42 - 6ª tarefa, verificação da medição da área com medida K



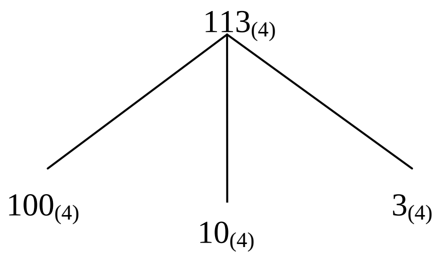

$K = 113_{(4)}$

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A correlação de cada ordem (destacada por uma cor diferente) da área com medida **K** e os algarismos do número ($113_{(4)}$), possibilita a conclusão de que a medição está correta (Ilustração 42). E, embora o algarismo três seja maior que um, ele representa a menor quantidade de unidades (em amarelo). Assim, a ordem menor é a primeira e a maior a terceira.

A próxima etapa do desenvolvimento da tarefa (Ilustração 43) consiste no registro do resultado da medição no esquema de decomposição (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009):

Ilustração 43 - 6ª tarefa, decomposição do número $113_{(4)}$




Fonte: Давыдов *et al.* (2012a).

O registro dos algarismos do número $113_{(4)}$, no esquema de decomposição (Ilustração 43), requer o emprego do algarismo zero, isso porque ele tem a função de indicar as ordens vazias. No processo de decomposição, foi divido o número em três parcelas, que serão somadas, conforme a ilustração 44 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009):

Ilustração 44 - 6ª tarefa, soma das parcelas

$$\boxed{100_{(4)} + 10_{(4)} + 3_{(4)} = 113_{(4)}}$$

Fonte: Давыдов *et al.* (2012a).

A soma das parcelas resultou no número inicialmente apresentado: $113_{(4)}$.

### 2.2.4 Operações com números compostos por dois algarismos

**7ª tarefa** (Ilustração 45): Compare os números (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 45 - 7ª tarefa, números a serem comparados

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6$ ...5& | 91 ...79 | 63 ... 36 | 26 ... 62 |
| 2@ ... 4! | 39 ...42 | 48 ... 84 | 76 ... 67 |

Fonte: Давыдов *et al*. (2012a).

Os números estão dispostos em pares para serem comparados (Ilustração 45). A comparação se inicia a partir dos pares apresentado na primeira coluna (Ilustração 46):

Ilustração 46 - 7ª tarefa, números a serem comparados

6$ ___ 5&

2@ ___ 4!

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Mas, como realizar a comparação dos números (Ilustração 46)? Qual o valor aritmético dos símbolos abstrato? Qual dos símbolos ($, &) é maior? (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). A síntese a ser elaborada será: para comparar os números é necessário considerar, primeiro, aquele que representa a ordem maior. Nos casos em análise, a ordem maior é a segunda. Seu valor numérico está determinado aritmeticamente, por isso, foi possível realizar as comparações (Ilustração 47):

Ilustração 47 - 7ª tarefa, comparação dos números

6$ > 5&

2@ < 4!

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Da análise das comparações resultou que: *seis* unidades de segunda ordem é maior que *cinco,* e *duas* unidades de segunda ordem é menor que *quatro* (Ilustração 47). Davýdov e colaboradores alertam sobre o fato de que, nas duas últimas colunas (Ilustração 45), os algarismos que compõem os números a serem comparados são os mesmos (63 e 36, por exemplo), o que mudou foi a posição dos números (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). Entretanto, a comparação dos números ocorreu de modo análogo ao anterior (Ilustração 47), tendo como resultado: 91 > 79; 39 < 42; 63 > 36; 48 < 84; 26 < 62 e 76 > 67.

**<u>8ª tarefa</u>** (Ilustração 48): Resolva as operações (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 48 - 8ª tarefa, operação de adição em diferentes bases numéricas

$$33_{(5)} + 1 = \boxed{\phantom{00}}_{(5)} \qquad 26_{(7)} + 1 = \boxed{\phantom{00}}_{(7)}$$

$$34_{(5)} + 1 = \boxed{\phantom{00}}_{(5)} \qquad 12_{(3)} + 1 = \boxed{\phantom{00}}_{(3)}$$

Fonte: Давыдов *et al*. (2012a, p. 98).

As operações de adição serão resolvidas a partir da base numérica indicada em cada uma delas (Ilustração 48). Davýdov e colaboradores alertam que o resultado de algumas operações incidirá na formação de uma nova ordem (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). A resolução da tarefa (8) se inicia com as seguintes operações na base quinária (Ilustração 49):

Ilustração 49 - 8ª tarefa, resolução das operações na base quinária

$$33_{(5)} + 1 = \boxed{34}_{(5)}$$

$$34_{(5)} + 1 = \boxed{40}_{(5)}$$

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Vale lembrar que, na base numérica quinária, ao formar agrupamentos compostos por cinco unidades, ocorrerá a formação de uma nova ordem. Na primeira operação (Ilustração 49), adicionamos uma unidade ao número *três e três*, na base quinária ($33_{(5)}$); esse processo resultou em *três e quatro* na base quinária ($34_{(5)}$). Na segunda operação ocorreu a formação de uma nova unidade de segunda ordem, pois cinco unidades de primeira ordem formaram uma nova unidade de segunda ordem (Ilustração 49). O resultado da operação foi *quatro e zero* na base quinária ($40_{(5)}$). Por fim, a resolução das duas últimas operações (Ilustração 50):

Ilustração 50 - 8ª tarefa, resolução das operações na base setenária e ternária

$$26_{(7)} + 1 = \boxed{30}_{(7)}$$

$$12_{(3)} + 1 = \boxed{20}_{(3)}$$

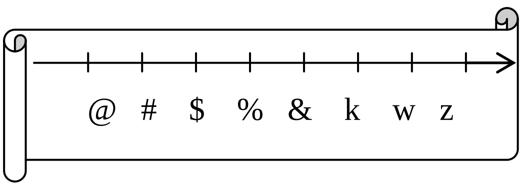
Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Ao adicionarmos uma unidade a *dois* e *seis* na base numérica setenária ($26_{(7)}$) ocorreu a formação de uma nova unidade de segunda ordem, pois *sete* unidades de primeira ordem formam *uma* de segunda (Ilustração 50). O mesmo ocorreu na operação seguinte, que apenas mudou foi a composição do agrupamento, porque a base numérica é a ternária. Deste modo, *três* unidades de primeira ordem formaram *uma* nova de segunda (Ilustração 50). O desenvolvimento da tarefa em estudo se finaliza com o registro dos resultados, na operação, após o sinal de igualdade: *três e zero* na base setenária ($30_{(7)}$) e *três e zero* ($30_{(3)}$) na base ternária (Ilustração 50).

### 2.2.5 Operações com números compostos por três algarismos

**<u>9ª tarefa</u>** (Ilustração 51): Registre os resultados das operações, a partir da reta com números abstratos (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 51 - 9ª tarefa, operação para ser resolvida com base na reta numérica




| | | |
|---|---|---|
| $96 + 1 = | w29 – 1 = | #00 – 1 = |
| $99 + 1 = | z00 – 1 = | #99 + 1 = |
| w99 + 1 = | &00 – 1 = | #00 + 1 = |

Fonte: Давыдов *et al*. (2012a).

A reta que auxiliará na resolução das operações é composta por números abstratos, ou seja, seus valores aritméticos não são explicitados (Ilustração 51). Segundo Davýdov e colaboradores, a reta será utilizada quando ocorrer a mudança na quantidade de unidades de terceira ordem e, como se trata do sistema de numeração decimal, da centena (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). O início da resolução da tarefa será com a primeira operação apresentada (Ilustração 52):

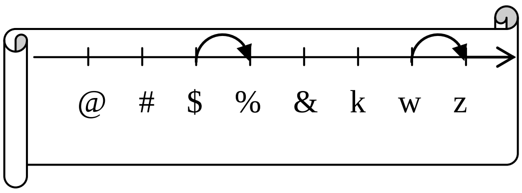
Ilustração 52 - 9ª tarefa, resolução da operação \$96 + 1 = ___

$96 + 1 = $97

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Na composição do número \$96, o valor da terceira ordem foi registrado por meio de um símbolo abstrato; em outras palavras, não foi determinado seu valor aritmético (Ilustração 52). Para resolver a operação é desnecessário recorrer à reta abstrata, porque não ocorreu a formação de uma nova terceira ordem. O resultado obtido foi \$97 (Ilustração 52). Diferentemente das operações \$99 + 1 = ___ e w99 + 1 = ___, que haverá a formação de uma nova terceira ordem (Ilustração 53).

Ilustração 53 - 9ª tarefa, resolução da operação \$99 + 1 = ___ e w99 + 1 = ___




$99 + 1 = %00
w99 + 1 = z00

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Nas operações em que a adição de unidades, forma uma nova terceira ordem, resulta em: uma unidade de terceira ordem superior, nenhuma de segunda e nenhuma de primeira ordem; por exemplo, na especificidade do sistema de numeração decimal, 199 + 1 = 200.

Em $99 + 1 = ___, a adição de uma unidade à parcela $99, implica em uma formação de uma nova terceira ordem (Ilustração 53). Por meio da reta foi possível solucionar a operação. Vale lembrar que, na reta (nos limites dos números positivos), a adição de uma unidade requer no deslocamento de uma unidade para a direta. Assim, o acréscimo de uma unidade ao número $, na reta, leva ao número %. Deste modo, mesmo sem o valor aritmético da terceira ordem, foi possível registrar o resultado da operação: $99 + 1 = %00 (Ilustração 53).

O mesmo aconteceu com a operação w99 + 1 = ___, que a adição de uma unidade ao número w99, resultou em uma nova unidade de terceira ordem (Ilustração 53). Na reta, o deslocamento em uma unidade para a direita a partir do número w, atingiu o número z. O resultado foi registrado na operação w99 + 1 = z00. A continuidade da mesma tarefa consiste na resolução da operação de subtração (Ilustração 54):

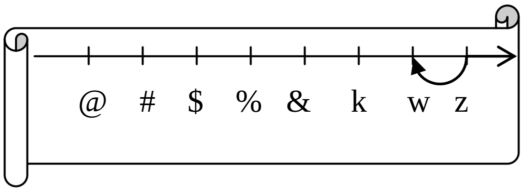
Ilustração 54 - 9ª tarefa, resolução da operação w29 – 1 = ___

| w29 – 1 = w28 |
|---|

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Ao subtrairmos uma unidade do número w29, obtivemos o resultado w28 (Ilustração 54). Não recorremos à reta porque não houve alteração na terceira ordem. Diferentemente do que ocorreu com a próxima operação z00 – 1 = ___ (Ilustração 55):

Ilustração 55 - 9ª tarefa, resolução da operação z00 – 1 = ___



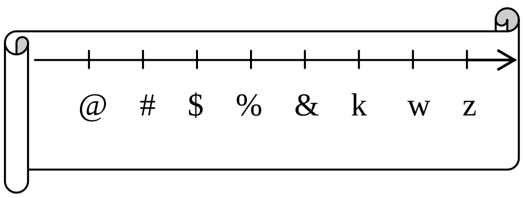

z00 – 1 = w99

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Conforme a ilustração 55, a subtração de uma unidade de um número composto por mais de uma unidade de terceira ordem, nenhuma de segunda e nenhuma de primeira, terá como resultado uma unidade inferior, também de terceira ordem. Na especificidade do sistema de numeração decimal, ao subtrairmos uma unidade do número 300, por exemplo, o resultado será uma unidade inferior, de terceira ordem (200), nove de segunda (90), e nove de primeira (9): 300 – 1 = 299.

Na reta numérica (nos limites dos números positivos), a subtração de uma unidade, ocorre pelo deslocamento para a esquerda. Na operação z00 – 1 = ___, o ponto de partida é o número z e o deslocamento em uma unidade para a esquerda. Deste movimento resultou o número w. Assim, o resultado da operação foi w99 (Ilustração 55). De modo análogo, ocorre com as demais operações (Ilustração 56):

Ilustração 56 - 9ª tarefa, resolução da operação




| | |
|---|---|
| &00 – 1 = %99 | #99 + 1 = $00 |
| #00 – 1 = @99 | #00 + 1 = #01 |

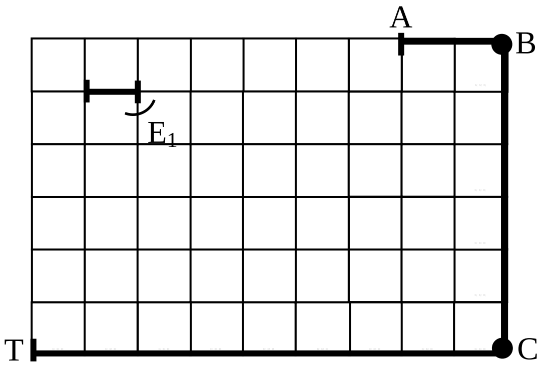
Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

As operações foram resolvidas com o registro de seus respectivos resultados ao lado de cada uma, após o sinal de igualdade (Ilustração 56).

### 2.2.6 Valores dos algarismos por meio da composição numérica

**<u>10ª tarefa</u>** (Ilustração 57): Meça os segmentos e determine o comprimento da polilinha[15] (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 57 - 10ª tarefa, segmentos a serem medidos




| | III | II | I |
|---|---|---|---|
| TC | | | |
| CB | | | |
| BA | | | |
| TCBA | | | |

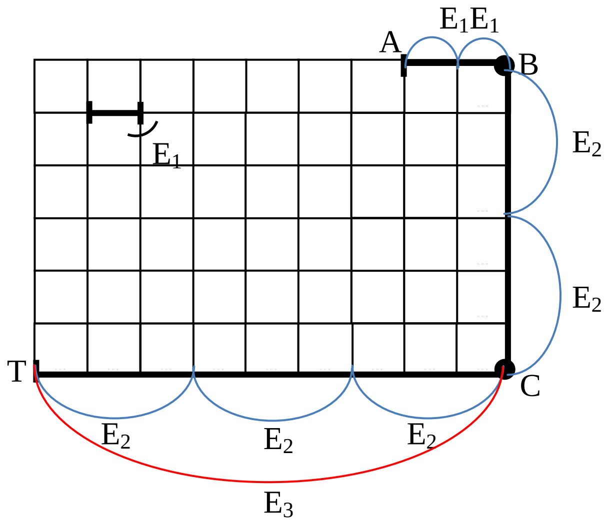
$$\_\_\_\__{(3)} + \_\_\_\__{(3)} + \_\_\_\__{(3)} = \_\_\_\__{(3)}$$

Fonte: Давыдов *et al.* (2012a).

O desenvolvimento da tarefa em estudo consiste em medir os segmentos, registrar os resultados no quadro valor de lugar e, posteriormente, somá-los (Ilustração 57). Iniciaremos pela medição dos segmentos. É importante lembrar que, na base numérica ternária, a unidade de medida de segunda ordem é *três* vezes a de primeira, e a de terceira ordem é *três* vezes a de segunda (Ilustração 58):

[15] Polilinhas são linhas contínuas compostas por vários segmentos.

Ilustração 58 - 10ª tarefa, medição do segmento $\overline{TC}$, $\overline{CB}$ e $\overline{BA}$




Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

O processo de medição do segmento $\overline{TC}$ resultou em *uma* unidade de medida de terceira ordem. Já o segmento $\overline{CB}$, em *duas* unidades de medidas de segunda ordem, e o segmento $\overline{BA}$, em *duas* de primeira ordem (Ilustração 58). Para finalizar a tarefa, registraremos os resultados dentro e fora do quadro valor de lugar. Posteriormente, adicionaremos estes resultados a fim de definir a soma de todos os segmentos (Ilustração 59):

Ilustração 59 - 10ª tarefa, registro da medida do segmento dentro e fora quadro valor de lugar

| | III | II | I |
|---|---|---|---|
| TC | 1 | | |
| CB | | 2 | |
| BA | | | 2 |
| TCBA | 1 | 2 | 2 |

$$100_{(3)} + 20_{(3)} + 2_{(3)} = 122_{(3)}$$

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

O resultado da medição de cada segmento compõe o número que representa a medida da polilinha (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). A medida do todo é composta pela soma dos segmentos ($\overline{TC}$, $\overline{CB}$ e $\overline{BA}$) que, registrada dentro e fora do quadro valor de lugar (Ilustração 59), resultou em $122_{(3)}$.

**11ª tarefa** (Ilustração 60): Determine as adições (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 60 - 11ª tarefa, operações de adição

$30_{(5)} + 2_{(5)} = \boxed{\phantom{000}}_{(5)}$ $\quad$ $700 + 7 = \boxed{\phantom{000}}$

$500_{(6)} + 20_{(6)} + 4_{(6)} = \boxed{\phantom{000}}_{(6)}$ $\quad$ $700 + 50 = \boxed{\phantom{000}}$

$400 + 30 + 8 = \boxed{\phantom{000}}$ $\quad$ $200 + 9 + 60 = \boxed{\phantom{000}}$

Fonte: Давыдов *et al*. (2012a, p. 106).

As operações da presente tarefa são formadas por parcelas dispostas em ordem decrescente, ou seja, maior para a menor, com exceção da última (Ilustração 60). As soluções das operações, ilustração 61, são:

Ilustração 61 - 11ª tarefa, resolução das operações

$30_{(5)} + 2_{(5)} = \boxed{32}_{(5)}$ $\quad$ $700 + 7 = \boxed{707}$

$500_{(6)} + 20_{(6)} + 4_{(6)} = \boxed{524}_{(6)}$ $\quad$ $700 + 50 = \boxed{750}$

$400 + 30 + 8 = \boxed{438}$ $\quad$ $200 + 9 + 60 = \boxed{269}$

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Na última operação, as parcelas não seguem a ordem decrescente, mesmo assim é possível obter o resultado a partir da compreensão sobre composição das ordens numéricas (Ilustração 61). Davýdov e colaboradores alertam que, se os números forem unidos mecanicamente, poderá ocorrer equívoco (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

### 2.2.7 Revisão de operações com números compostos por três algarismos

**12ª tarefa** (Ilustração 62): Resolva as operações (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 62 - 12ª tarefa, operação de adição e subtração

| | | |
|---|---|---|
| 70 + 2 | 819 - 800 | 580 - 80 |
| 69 - 9 | 453 - 50 | 300 + 40 |
| 200 + 5 | 261 - 6 | 100 + 10 |

Fonte: Давыдов *et al*. (2012a, p. 109).

As operações de adição e subtração serão resolvidas a partir da composição e decomposição, respectivamente (Ilustração 62). De início operemos a adição (Ilustração 63):

Ilustração 63 - 12ª tarefa, resultado das operações de adição

| | |
|---|---|
| 70 + 2 = 72 | 300 + 40 = 340 |
| 200 + 5 = 205 | 100 + 10 = 110 |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Para tanto, tomamos como referência as ordens (Ilustração 63). Na primeira, por exemplo, o resultado obtido foi 72: ou seja, somamos *sete* unidades de segunda ordem, mais *duas* de primeira (70 + 2 = 72). Davýdov e colaboradores alertam sobre a possibilidade dos estudantes desenvolverem a adição das parcelas de modo mecânico, sem considerar o significado das ordens como, por exemplo, 70 + 2 = 702 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). Para evitar tal equívoco, é preciso considerar a lógica interna das ordens numéricas, conforme mencionamos no início do presente capítulo. Na sequência, apresentaremos os resultados das operações de subtração (Ilustração 64):

Ilustração 64 - 12ª tarefa, resultado das operações de subtração

819 – 800 = 19 580 – 80 = 500

69 – 9 = 60 453 – 50 = 403

261 – 6 =

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

As operações de subtração foram resolvidas por meio da decomposição das ordens numéricas (Ilustração 64). Por exemplo, na primeira operação, 819 – 800 = ___, ao decompormos o minuendo (819) teremos: 800 + 10 + 9. Desta decomposição subtraímos 800, e sobraram as unidades de segunda e primeira ordem: 10 + 9 = 19. De modo semelhante ocorre com as demais, exceto com a operação 261 – 6 = ___. Ao decompormos o minuendo, temos o seguinte: 200 + 60 + 1. Mas, como subtrair seis unidades de uma? A conclusão obtida é que esta operação não pode ser resolvida como as demais. Davýdov e colaboradores orientam que o professor deve refletir com os estudantes, porque resultados como 21 ou 201 para a operação em análise são errôneos (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

## 2.3 ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS COMPOSTOS POR VÁRIOS ALGARISMOS

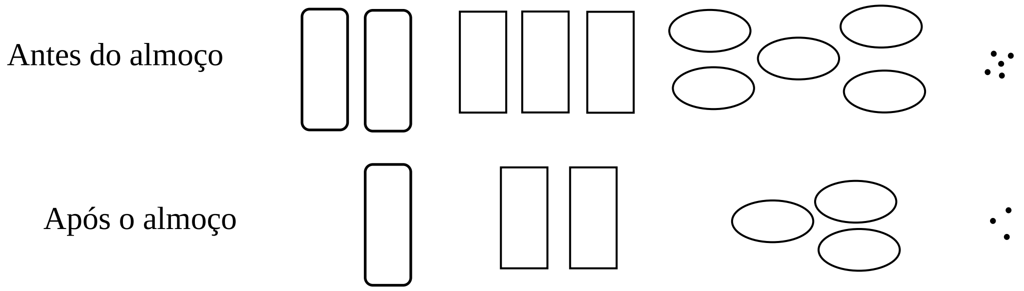
Até o momento, desenvolvemos operações de adição e subtração com números compostos por duas e três ordens. As operações foram realizadas por meio da composição e decomposição numérica (tarefas 8, 9, 10, 11 e 12). Os números a serem operados nas próximas tarefas são compostos por várias ordens (duas, três, quatro, etc.). A resolução ocorrerá no algoritmo das operações de adição e subtração. A introdução deste ocorre, na proposição davydoviana, a partir da necessidade emergente das operações, que não podem ser resolvidas por meio da composição e decomposição, como a operação 261 – 6 =___ (última operação apresentada na tarefa 12).

Nesse novo método de operacionalização da adição e subtração, inicialmente serão apresentadas operações que não desencadeiam a formação de uma nova ordem. Deste modo, a adição ou subtração de cada ordem ocorrerá a partir de qualquer uma delas. Posteriormente, serão propostos os casos que requerem o início da operacionalização pela unidade de medida de primeira ordem. Este método também contribui para a compreensão das operações desenvolvidas até então (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

### 2.3.1 Introdução do algoritmo da adição e subtração

**13ª tarefa** (Ilustração 65): A partir do registro da produção realizada antes e após o almoço, determine a quantidade de lápis produzido em um dia de trabalho (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009):

Ilustração 65 - 13ª tarefa, quantidade de lápis produzidos por meio do esquema das ordens




Fonte: Давыдов *et al*. (2012b).

Os lápis foram armazenados em caixas com capacidade para dez unidades. A produção de um dia de trabalho foi representada na ilustração 65: cada ponto representa uma unidade (um lápis); cada elipse, dez unidades (uma caixa de lápis); o retângulo representa uma pilha composta por dez caixas e o retângulo com *cantos arredondados,* dez pilhas de caixas (cada pilha com dez caixas). Há, pois, uma conexão entre a organização das caixas e o sistema de numeração decimal: uma caixa composta por dez lápis corresponde à unidade de medida de segunda ordem (elipse); uma pilha composta por dez caixas representa a de terceira ordem, pois esta é dez vezes a ordem anterior (retângulo); e dez pilhas equivalem à quarta ordem (retângulo com *cantos arredondados*). A proposição da tarefa consiste no cálculo da quantidade de lápis que foi produzida em um dia de trabalho (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Para tanto, requer a adição de cada ordem (que, no sistema de numeração decimal, possuem nomes: unidade, dezena, centena, unidade milhar, etc...). Para tal um procedimento é partir da contagem das ordens expressas na ilustração 65. Contudo, como o objetivo é o cálculo numérico, a sugestão de Davýdov e colaboradores é que a operacionalização ocorra com os números no quadro valor de lugar (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Deste modo, o registro ocorre no referido quadro (Ilustração 66) a produção do período matutino (duas unidades de milhar, três centenas, cinco dezenas e cinco unidades) e vespertino (uma unidade de milhar, duas centenas, três dezenas e três unidades) e, posteriormente, inicia o processo de operacionalização:

Ilustração 66 - 13ª tarefa, cálculo da produção de lápis em um dia

| | Mil | Cen | Dez | Un |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 5 | 5 |
| + | 1 | 2 | 3 | 3 |
| | 3 | 5 | 8 | 8 |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Trata-se de um novo modo de operacionalização; neste caso, por meio do algoritmo da adição. O resultado representa a produção de lápis realizada em um dia de trabalho: *três* unidades de milhar, *cinco* centenas, *oito* dezenas e *oito* unidades (Ilustração 66). É possível averiguar este valor, resultante da operação, a partir da contagem das ordens representadas na ilustração 65.

Na continuidade do desenvolvimento da presente tarefa, Davýdov e colaboradores sugerem que o professor informe aos estudantes sobre a distribuição de *mil e vinte e quatro* (1024) lápis, do total produzido em um dia de trabalho (3588). Quantos lápis restarão desta produção? A resposta à questão, requer a operação de subtração, indicada pelo operador menos (-), conforme a ilustração 67 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009):

Ilustração 67 - 13ª tarefa, cálculo após a distribuição de 1024 lápis

| | Mil | Cen | Dez | Un |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | 5 | 8 | 8 |
| - | 1 | 0 | 2 | 4 |
| | 2 | 5 | 6 | 4 |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Com a operacionalização (Ilustração 67), o resultado indica: *duas* unidades de milhar, *cinco* centenas, *seis* dezenas e *quatro* unidades (2564). Esse valor é constatado na contagem das ordens apresentadas nos esquemas na ilustração 65. Para finalizar a tarefa, o professor informa aos estudantes, a partir das orientações de Davýdov e colaboradores, que será distribuída do total (2564), a quantidade de *trezentos e quarenta e um* (341) lápis. Após, esta distribuição, quantos lápis restarão? (ДАВЫДОВ *et al*, 2012b).

O registro dos números no quadro valor de lugar é a primeira iniciativa de resolução. O subtraendo (341) é composto por três ordens; o registro começa pela primeira (Ilustração 68). O processo de resolução da subtração, por enquanto, pode ser iniciado pela primeira ou quarta ordem (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009):

Ilustração 68 - 13ª tarefa, cálculo após a distribuição de 341 lápis

| | Mil | Cen | Dez | Un |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 5 | 6 | 4 |
| - | | 3 | 4 | 1 |
| | 2 | 2 | 2 | 3 |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Vale lembrar que o espaço vazio, no quadro valor de lugar (Ilustração 68), indica que, naquela ordem, não há unidades (0). Assim, retiramos *nenhuma* unidade de milhar das *duas* do minuendo (2564), subtraímos as ordens e obtivemos, como resultado, *dois mil duzentos e vinte e três* (2223).

**14ª tarefa** (Ilustração 69): Determine o resultado das operações a partir do algoritmo (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009):

Ilustração 69 - 14ª tarefa, operações a serem resolvidas

7435 + 452

8562 - 51

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 7 | 4 | 3 | 5 |
| + | | 4 | 5 | 2 |
| | | | | |

4564 - 302

21 + 2458

Fonte: Давыдов *et al*. (2012b, p. 12).

O desenvolvimento da tarefa em estudo consiste em reescrever os números no quadro valor de lugar e operacionalizar as adições e subtrações, conforme a ilustração 69 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). O início da resolução da tarefa se dá pela operação de adição (Ilustração 70):

Ilustração 70 - 14ª tarefa, reescrita da operação no quadro valor de lugar e cálculo

7435 + 452

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 7 | 4 | 3 | 5 |
| + | | 4 | 5 | 2 |
| | 7 | 8 | 8 | 7 |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Ao resolver a operação 7435 + 452=___ (Ilustração 70) o resultado é *sete mil oitocentos e oitenta e sete* (7887). A próxima operação a ser escrita no quadro e, posteriormente calculada, será de subtração (Ilustração 71):

Ilustração 71 - 14ª tarefa, reescrita da operação no quadro valor de lugar e cálculo

8562 - 51

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 8 | 5 | 6 | 2 |
| - | | | 5 | 1 |
| | 8 | 5 | 1 | 1 |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

O subtraendo é composto por duas ordens, portanto ele ocupou, no quadro valor de lugar, a primeira e segunda ordem (Ilustração 71). Vale lembrar que, o espaço vazio do quadro indica que não há unidades naquela ordem. Assim, a subtração de *cinquenta e um* (51) do minuendo, *oito mil quinhentos e sessenta e dois* (8562), resulta em, *oito mil quinhentos e onze* (8511). De modo análogo ocorrerá com as outras duas operações apresentadas na tarefa.

### 2.3.2 Adição e subtração por decomposição

**15ª tarefa** (Ilustração 72): Registre o subtraendo ou o adicionador e resolva as operações (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009):

Ilustração 72 - 15ª tarefa, operações a serem resolvidas

| | | |
|---|---|---|
| 879 - $\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}$ | 1253+ $\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}$ | 628 - $\boxed{\phantom{0}}$ |
| 564 - $\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}$ | 4572 + $\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}$ | 764 + $\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}$ |

Fonte: Давыдов *et al*. (2012b, p. 15).

A tarefa a ser desenvolvida (15) é composta por operações de adições e subtrações (Ilustração 72). Cada uma apresenta o adicionando (adição) ou minuendo (subtração). Dos números desconhecidos (o adicionador e o subtraendo), a tarefa predetermina as quantidades de ordens (por meio dos espaços vazios em cada operação). É necessário o registro desses números e a resolução das operações. Davýdov e colaboradores recomendam que o professor alerte os estudantes para não escolherem qualquer número, mas números convenientes para a operacionalização. Ou seja, números redondos[16], que representam a quantidade de primeira, segunda, terceira ou quarta ordem, conforme os espaços vazios indicados na ilustração ao lado de cada adicionando ou minuendo (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). A resolução da tarefa se inicia pelas operações de subtração, apresentadas na primeira coluna (Ilustração 73):

Ilustração 73 - 15ª tarefa, resolução das operações de subtração

$$879 - \boxed{7}\boxed{0} = 809$$

$$564 - \boxed{5}\boxed{0}\boxed{0} = 64$$

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Os registros dos subtraendos (70 e 500) são realizados pela quantidade de ordens que estes deveriam ser compostos e do valor dos minuendos (Ilustração 73). Necessário se faz a decomposição do minuendo (800 + 70 + 9) e subtraímos as *sete* unidades de segunda ordem, pois a indicação residia na extração da quantidade de unidades de segunda ordem. Deste procedimento, resultam *oitocentas e nove unidades* (809); este foi registrado na operação, após o sinal de igualdade. A operação seguinte também foi resolvida por meio da decomposição: o resultado foi *sessenta e quatro* unidades (64). Continuaremos o desenvolvimento da tarefa com a resolução das operações de adição (Ilustração 74), apresentadas na segunda coluna da ilustração 72:

Ilustração 74 - 15ª tarefa, resolução das operações de adição

$$1253 + \boxed{1}\boxed{0} = 1263$$

$$4572 + \boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0} = 5572$$

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Na primeira operação, com o acréscimo do adicionador por nós estabelecido (*uma* unidade de segunda ordem), houve a formação de *uma* nova unidade de segunda ordem

[16] Neste caso são os números terminados em zero.

(dezena), e culminou no resultado de *mil duzentos e sessenta e três unidades* (1263). Na segunda operação, acrescentamos *uma* unidade na quarta ordem (Ilustração 74) e obtivemos *cinco mil quinhentos e setenta e dois* (5572). O mesmo, ocorre com as operações da última coluna (Ilustração 75):

Ilustração 75 - 15ª tarefa, resolução das operações de subtração e adição

$$628 - \boxed{8} = 620$$

$$764 + \boxed{2}\boxed{0} = 784$$

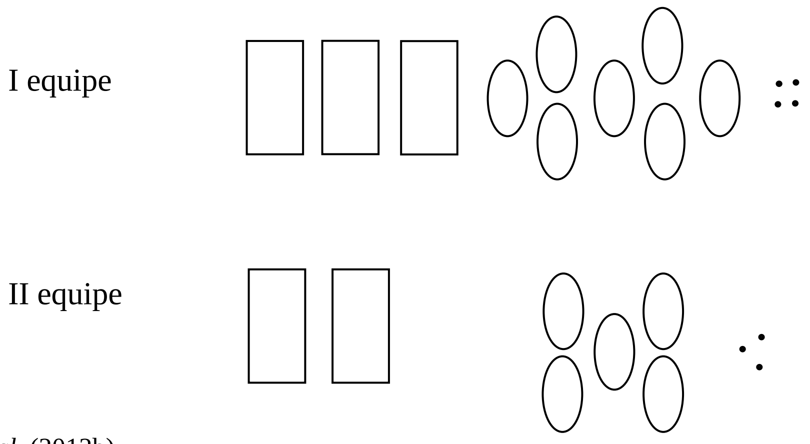
Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Na primeira operação, subtraímos *oito* unidades de primeira ordem de *seiscentos e vinte e oito* (628), e obtivemos como resultado o valor de *seiscentos e vinte* (620). Na segunda operação, foi adicionado *duas* unidades de segunda ordem às *seis*, e obtivemos o total de *setecentas e oitenta e quatro* (784), conforme a ilustração 75.

## 2.4 ADIÇÃO COM REAGRUPAMENTO

**<u>16ª Tarefa</u>** (Ilustração 76): Determine a quantidade de carros (de brinquedo) produzida por duas equipes (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009):

Ilustração 76 - 16ª tarefa, produção das equipes por meio dos esquemas das ordens




Fonte: Давыдов *et al*. (2012b).

Segundo orientações de Davýdov e colaboradores, o desenvolvimento da tarefa consiste no registro das ordens de medidas que representam a produção de carros (Ilustração 76) no quadro valor de lugar. Na sequência procede-se a operacionalização, conforme a ilustração 77 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009):

Ilustração 77 - 16ª tarefa, registro e operacionalização no quadro valor de lugar

| | C | D | U |
|---|---|---|---|
| | 3 | 7 | 4 |
| + | 2 | 5 | 3 |
| | 5 | 12 | 7 |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A partir da adição é obtido *cinco* unidades de terceira ordem, *doze* de segunda e *sete* de primeira (Ilustração 77). Porém, não pode manter o registro de *doze* unidades de segunda ordem, porque na especificidade da presente tarefa, o sistema de numeração considerado é o decimal. Deste modo, cada *dez* unidades formam *uma* unidade de ordem superior. Assim, será necessário reagrupar *dez* unidades de segunda em *uma* de terceira ordem, conforme a ilustração 78 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009):

Ilustração 78 - 16ª tarefa, registro da formação de uma nova terceira ordem

| | C | D | U |
|---|---|---|---|
| | 3 | 7 | 4 |
| + | 2 | 5 | 3 |
| | ~~5~~ | ~~12~~ | 7 |
| | 6 | 2 | 7 |

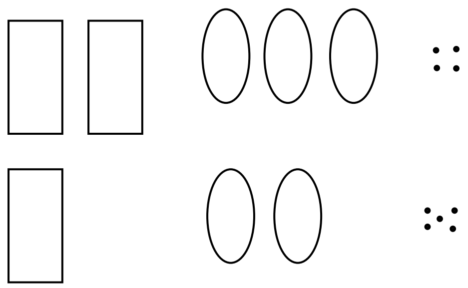
Fonte: Давыдов *et al*. (2012b).

Com o reagrupamento das *dez* unidades de segunda ordem, resultam em *seis* unidades de terceira ordem, *duas* de segunda e *sete* de primeira. Assim, foram produzidos *seiscentos e vinte e sete* carros (Ilustração 78). Para finalizar do desenvolvimento da tarefa (16) faz-se o seguinte questionamento: por que foi necessário realizar as correções no quadro valor de lugar? (ДАВЫДОВ *et al*., 2012b). Em síntese, as correções no quadro (reagrupamento) se fazem necessário sempre que a quantidade de unidades de ordens atinge o valor da base numérica considerada, ou seja: forma *uma* nova unidade de ordem.

**<u>17ª tarefa</u>** (Ilustração 79): Resolva a operação (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 79 - 17ª tarefa, operação de adição na base numérica octogenária

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 4 | (8) |
| + | 1 | 2 | 5 | (8) |
| | | | | |
| | | | | |



Fonte: Давыдов *et al*. (2012b, p. 15).

O esquema das ordens de medida, apresentada na ilustração 79, auxiliará no cálculo. O adicionando e o adicionador provém do sistema octogenário; portanto, o agrupamento de oito unidades emana um novo reagrupamento (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). A resolução se inicia por meio do cálculo, no quadro valor de lugar (Ilustração 80):

Ilustração 80 - 17ª tarefa, resultado da operação de adição na base octogenária

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 4 | (8) |
| + | 1 | 2 | 5 | (8) |
| | 3 | 5 | 9 | |
| | | | | |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A operacionalização resultou em *três* unidades de terceira ordem, *cinco* de segunda e *nove* de primeira (Ilustração 80). Vale mencionar que a formação de *uma* nova unidade de ordem, ocorre quando a quantidade de unidades atingirem o valor da base numérica considerada. Neste caso houve, reagrupamento de *oito* unidades de primeira ordem em *uma* de segunda (Ilustração 81):

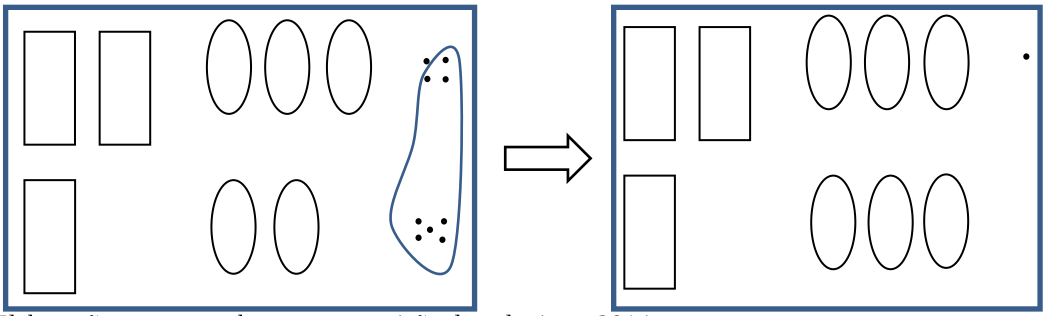
Ilustração 81 - 17ª tarefa, reagrupamento das unidades de primeira ordem

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 4 | (8) |
| + | 1 | 2 | 5 | (8) |
| | 3 | $\cancel{5}$ | $\cancel{9}$ | |
| | 3 | 6 | 1 | |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Ao reagrupar as unidades de primeira ordem (Ilustração 81) obtivemos *três* unidades de terceira, *seis* de segunda e *uma* de primeira, na base numérica octogenária ($361_{(8)}$). Explicitaremos o movimento de reagrupamento a partir do esquema das ordens (Ilustração 82):

Ilustração 82 - 17ª tarefa, reagrupamento a partir do esquema das ordens



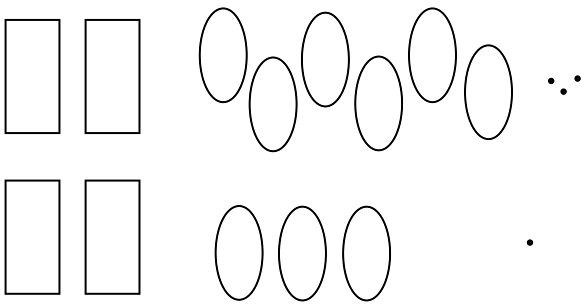
Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Na ilustração 82, houve reagrupamento de *oito* unidades de primeira ordem em *uma* de segunda. O resultado obtido, assim como no quadro valor de lugar (Ilustração 81), também foi *três* unidades de terceira ordem, *seis* de segunda e *uma* de primeira.

**18ª tarefa** (Ilustração 83): Resolva a operação (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 83 - 18ª tarefa, operação de adição na base numérica setenária

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 6 | 3 | (7) |
| + | 2 | 3 | 1 | (7) |
| | | | | |
| | | | | |



Fonte: Давыдов *et al*. (2012b, p. 16).

O desenvolvimento da tarefa em estudo consiste na operacionalização da adição na base numérica setenária (Ilustração 83). O esquema das ordens, apresentada ao lado da operação, auxiliará no processo de reagrupamento (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). Iniciaremos a resolução a partir da adição no quadro valor de lugar (Ilustração 84):

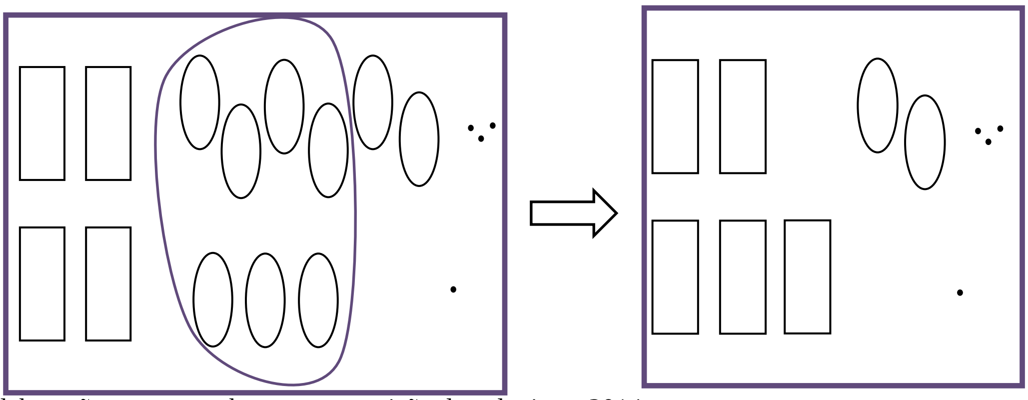
Ilustração 84 - 18ª tarefa, resultado da operação de adição na base setenária

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 6 | 3 | (7) |
| + | 2 | 3 | 1 | (7) |
| | ~~4~~ | ~~9~~ | 4 | |
| | 5 | 2 | 4 | |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Calculamos a operação e obtivemos *quatro* unidades de terceira ordem, *nove* de segunda e *quatro* de primeira (Ilustração 84). Como a base numérica utilizada é a setenária, houve o reagrupamento de *sete* unidades de segunda ordem em *uma* de terceira. Deste procedimento, resultaram *cinco* unidades de terceira ordem, *duas* de segunda e *quatro* de primeira. O mesmo ocorrerá com o esquema das ordens de medidas (Ilustração 85):

Ilustração 85 - 18ª tarefa, reagrupamento a partir do esquema das ordens



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Assim, o reagrupamento por meio do esquema das ordens, como no quadro valor de lugar, também resultou em *cinco* unidades de terceira, *duas* de segunda e *quatro* de primeira ordem, na base numérica setenária (Ilustração 85).

**19ª tarefa** (Ilustração 86): Resolva as operações (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 86 - 19ª tarefa, operações de adição a serem resolvidas

Iniciar o cálculo pela terceira ordem

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 3 | 4 | 8 |
| + | 4 | 2 | 6 |
| | | | |
| | | | |

Iniciar o cálculo pela primeira ordem

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 3 | 4 | 8 |
| + | 2 | 3 | 5 |
| | | | |
| | | | |

Fonte: Давыдов *et al*. (2012b).

Na ilustração 86, apresentamos duas operações, uma com a indicação para iniciar o cálculo a partir da terceira ordem e a outra pela primeira ordem. Introduziremos o desenvolvimento da presente tarefa com a resolução da primeira, que prevê o início do cálculo pela terceira ordem (Ilustração 87):

Ilustração 87 - 19ª tarefa, resolução da adição, com início na terceira ordem

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 3 | 4 | 8 |
| + | 4 | 2 | 6 |
| | 7 | ~~6~~ | ~~14~~ |
| | 7 | 7 | 4 |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A adição das unidades de terceira ordem resulta em *sete* unidades, as de segunda, em *seis* unidades; e as de primeira resultaram em *quatorze* unidades (Ilustração 87). O valor referente das unidades de primeira (14) ordem ultrapassou o limite da base numérica considerada (decimal). Por isso, foi necessário reagrupar *dez* unidades em *uma* nova, de segunda, e restaram *quatro* unidades de primeira ordem. Após o reagrupamento, o valor resultante foi *setecentas e setenta e quatro* (774) unidades.

Finalizaremos a tarefa em estudo (19) com a resolução da última operação. Para operacionalizar adições que envolvem reagrupamentos de modo mais ágil, Davýdov e colaboradores propõem o início do cálculo a partir da unidade de primeira ordem. Ao ocorrer a formação de *uma* nova ordem, esta será indicada com uma seta e o número *um*. Este contribui para lembrar a existência da nova ordem que se formou, conforme apresentaremos na ilustração 88 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009):

Ilustração 88 - 19ª tarefa, resolução da adição, com início na primeira ordem

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 1 | |
| | 3 | 4 | 8 |
| + | 2 | 3 | 5 |
| | 5 | 8 | 3 |
| | | | |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A adição das unidades de primeira ordem resultou em *treze*. Destas, compomos um agrupamento com dez unidades (uma nova unidade de segunda ordem) e sobraram três. Realizamos este processo mentalmente, e o registramos na operação com a seta e o número *um*. Registramos as três unidades de primeira ordem e adicionamos as demais ordens. O resultado obtido foi: *cinco* unidades de terceira ordem, *oito* de segunda e *três* de primeira (Ilustração 88). Este procedimento agiliza a operacionalização, pois não há necessidade de voltar ao resultado e reagrupar as ordens, como procedemos na primeira operação (Ilustração 87). Deste modo, a síntese a ser elaborada refere-se à conveniência de se iniciar o cálculo das operações de adição a partir da unidade de medida de primeira ordem (ДАВЫДОВ *et al*., 2012b).

<u>**20ª tarefa**</u> (Ilustração 89): Determine o resultado das operações e verifique se a indicação de formação de uma nova ordem esta correta (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009):

Ilustração 89 - 20ª tarefa, operações a serem resolvidas

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | | | |
| | 1 | 6 | 7 | 5 |
| + | 3 | 5 | 2 | 4 |
| | | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 1 | |
| | 2 | 8 | 9 |
| + | 3 | 0 | 6 |
| | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 4 | 7 | 2 |
| + | 3 | 7 | 5 |
| | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 4 | 2 | 9 | 4 |
| + | 1 | 5 | 2 | 2 |
| | | | | |

Fonte: Давыдов *et al*. (2012b).

Nas duas primeiras operações (Ilustração 89) estão sinalizadas, com a seta e com o número *um*, a ordem que ocorrerá a formação de *uma* nova unidade. Na penúltima, consta apenas a seta indicando a formação de uma nova ordem (terceira). E na última operação não há marcações: elas ocorrerão no decorrer da operacionalização (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). Na ilustração 90, apresentaremos a resolução das duas primeiras operações:

Ilustração 90 - 20ª tarefa, resolução das operações

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | | | |
| | 1 | 6 | 7 | 5 |
| + | 3 | 5 | 2 | 4 |
| | 5 | 1 | 9 | 9 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 1 | |
| | 2 | 8 | 9 |
| + | 3 | 0 | 6 |
| | 5 | 9 | 5 |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Nas operações apresentadas na ilustração 90, as marcações dadas estavam corretas. Na primeira operação (da direita para a esquerda) ocorreu a formação de *uma* nova unidade de segunda ordem e, na segunda, *uma* nova de quarta ordem. Os resultados obtidos das operações foram *quinhentos e noventa e cinco* (595) e *cinco mil cento e noventa e nove* (5199), respectivamente (Ilustração 90). A finalização da tarefa se dá com a resolução das duas últimas operações apresentadas (Ilustração 91):

Ilustração 91 - 20ª tarefa, resolução das operações

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | | |
| | 4 | 7 | 2 |
| + | 3 | 7 | 5 |
| | 8 | 4 | 7 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 4 | 2 | 9 | 4 |
| + | 1 | 5 | 2 | 2 |
| | | | | |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Iniciamos a resolução pela primeira operação (Ilustração 91), que contém a sinalização da formação de *uma* nova ordem (terceira). O registro do número *um* (1), acima da terceira ordem, foi necessário porque ocorreu a formação de *uma* nova unidade. O resultado obtido foi: *oitocentas e quarenta e sete* (847) unidades.  Na última operação da tarefa, conforme mencionado, não contém a indicação da formação de *uma* nova ordem, porque uma nova ordem se revelará durante a operacionalização (Ilustração 92):

Ilustração 92 - 20ª tarefa, resolução da última operação

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 4 | 2 | 9 | 4 |
| + | 1 | 5 | 2 | 2 |
| | | | | 6 |

⇨

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | | |
| | 4 | 2 | 9 | 4 |
| + | 1 | 5 | 2 | 2 |
| | | | 1 | 6 |

⇨

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | | | |
| | 4 | 2 | 9 | 4 |
| + | 1 | 5 | 2 | 2 |
| | | 8 | 1 | 6 |

⇨

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | | | |
| | 4 | 2 | 9 | 4 |
| + | 1 | 5 | 2 | 2 |
| | 5 | 8 | 1 | 6 |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A adição das unidades de primeira ordem resultou em *seis*. Em outras palavras, não houve a formação de um novo agrupamento, diferentemente do que ocorre na segunda, cujo resultado consiste em *onze* unidades. Neste caso, houve o reagrupamento de *dez* unidades em *uma* de terceira ordem e, ainda, restou *uma* de segunda ordem, conforme registrado no quadro. A seta e o número um (1) indicam a formação de *uma* nova terceira ordem. Para finalizar a operação, adicionamos as unidades de terceira e quarta ordem, o resultado foi de *oito* e *cinco*, respectivamente (Ilustração 92).

**<u>21ª tarefa</u>** (Ilustração 93): Determine o valor do adicionador de cada operação (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 93 - 21ª tarefa, operação de adição para definir o adicionador

| | |
|---|---|
| $7_{(8)} + \boxed{\phantom{0}}_{(8)} = 10_{(8)}$ | $5_{(6)} + \boxed{\phantom{0}}_{(6)} = 10_{(6)}$ |
| $70_{(8)} + \boxed{\phantom{0}}_{(8)} = 100_{(8)}$ | $5_{(9)} + \boxed{\phantom{0}}_{(9)} = 10_{(9)}$ |
| $700_{(8)} + \boxed{\phantom{0}}_{(8)} = 1000_{(8)}$ | $5_{(7)} + \boxed{\phantom{0}}_{(7)} = 10_{(7)}$ |

Fonte: Давыдов *et al*. (2012b, p. 17).

A tarefa (21) propõe que se determine o valor do adicionador: o resultado e o adicionando são conhecidos (Ilustração 93). Os resultados consistem na formação de *uma* unidade de segunda, terceira ou quarta ordem (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). Iniciaremos a resolução a partir da primeira coluna: nela, o sistema de numeração considerado é o octogenário (Ilustração 94):

Ilustração 94 - 21ª tarefa, resolução de operações no sistema numérico octogenário

$$7_{(8)} + 1_{(8)} = 10_{(8)}$$

$$70_{(8)} + 10_{(8)} = 100_{(8)}$$

$$700_{(8)} + 100_{(8)} = 1000_{(8)}$$

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Lembramos que o número um e zero (10) representa a base numérica de qualquer sistema de numeração, em seu primeiro agrupamento (segunda ordem). Na primeira operação (Ilustração 94), para mantermos o resultado previamente determinado, $10_{(8)}$, acrescentamos *uma* unidade ao adicionando ($7_{(8)}$). Isto porque a base numérica considerada é a octogenária, e *oito* unidades formam *uma* unidade de segunda ordem e *nenhuma* de primeira ($10_{(8)}$). Na segunda operação, adicionamos *uma* unidade de segunda ordem ($10_{(8)}$) ao adicionando ($70_{(8)}$), desta operacionalização, resultaram *oito* unidades de segunda ordem. Como a base numérica considerada é a octogenária, reagrupamos as *oito* unidades de segunda ordem em *uma* de terceira, e obtivemos o resultado predeterminado na operação ($100_{(8)}$). De modo análogo, resolvemos a última operação, cujo resultado é constituído por quatro ordens (Ilustração 94). Calcularemos os resultados referentes às três últimas adições, compostas por diferentes bases numéricas (Ilustração 95):

Ilustração 95 - 21ª tarefa, resolução de operações em diferentes sistemas numéricos

$$5_{(6)} + 1_{(6)} = 10_{(6)}$$

$$5_{(9)} + 4_{(9)} = 10_{(9)}$$

$$5_{(7)} + 2_{(7)} = 10_{(7)}$$

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A primeira operação é composta pelo adicionando $5_{(6),}$ e o resultado *um e zero* na base hexanária ($10_{(6)}$), que, para a manutenção, foi adicionado *uma* unidade (Ilustração 95). O mesmo modo é adotado para determinar o adicionador das demais operações, a partir da base numérica de cada uma delas.

### 2.4.1 Composição do algoritmo de adição com reagrupamento

**22ª tarefa** (Ilustração 96): Calcule as operações (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 96 - 22ª tarefa, operações de adição a serem calculadas

| | | |
|---|---|---|
| 453 + 283 | 453 + 29 | 435 + 182 |
| 35 + 192 | 435 + 821 | 35 + 328 |

Fonte: Давыдов *et al*. (2012b).

Até o momento, registrávamos as operações no quadro valor de lugar e, nele, realizávamos os cálculos. Porém, a sua construção envolve um tempo considerável. Para agilizar a operacionalização, Davýdov e colaboradores propõem a utilização das linhas do caderno para o registro do algoritmo que, para considerar a posição das ordens, elas serão expostas uma abaixo da outra (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). A resolução se inicia pelas operações que constam na primeira coluna (Ilustração 96), conforme ilustração 97:

Ilustração 97 - 22ª tarefa, resolução das operações 453 + 283 e 35 + 192

$$\begin{array}{r} 1\phantom{00} \\ 453 \\ +\;283 \\ \hline 736 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 1\phantom{00} \\ 35 \\ +\;192 \\ \hline 227 \end{array}$$

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Os números que compõem as operações estão escritos no sistema de numeração decimal. O ponto de partida é o registro da primeira operação, na qual adicionador e adicionando são compostos por três ordens (Ilustração 97). Ao operarmos as ordens, ocorreu a formação de *uma* nova unidade de ordem, a terceira, registrada com a seta e o número *um* (1). O resultado obtido foi *setecentas e trinta e seis* unidades (736).

Na outra operação, adicionando e adicionador são compostos por quantidades de ordens diferentes, mas o procedimento de resolução é o mesmo (Ilustração 97). Cada ordem do adicionador foi registrada abaixo da respectiva ordem do adicionando. Desta operacionalização obtivemos *duzentas e vinte e sete* unidades (227) como resultado. Procedimento similar é adotado para as demais operações (Ilustração 98):

Ilustração 98 - 22ª tarefa, resolução das demais operações

$$\begin{array}{r} {}^{1}\phantom{3}\\ 453 \\ +\ \ 29 \\ \hline 482 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{1}\phantom{35}\\ 435 \\ +\ 821 \\ \hline 1256 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{1}\phantom{3}\\ 435 \\ +\ 182 \\ \hline 617 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{1}\phantom{5}\\ 35 \\ +\ 328 \\ \hline 363 \end{array}$$

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Em cada operação ocorreu a formação de *uma* nova unidade de segunda, terceira ou quarta ordem (Ilustração 98).

### 2.4.2 Adição com vários reagrupamentos

**23ª tarefa** (Ilustração 99): Resolva as operações (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 99 - 23ª tarefa, operações de adição a serem resolvidas

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 3 | 4 | 7 |
| + | 1 | 9 | 3 |
| | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 3 | 4 | 7 |
| + | 4 | 7 | 5 |
| | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 3 | 4 | 7 |
| + | 8 | 8 | 6 |
| | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 3 | 4 | 7 |
| + | 2 | 8 | 7 |
| | | | |

Fonte: Давыдов *et al*. (2012b).

No processo de resolução, nas diferentes ordens, se formará *uma* nova unidade de ordem (Ilustração 99). Por exemplo, a adição das unidades de primeira ordem resultou em *uma* de segunda e, ao adicionar as de segunda, formaram *uma* de terceira ordem (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). A resolução da tarefa deu-se pela, adição das parcelas *trezentos e quarenta e sete* (347) e *cento e noventa e três* (193), conforme ilustração 100:

Ilustração 100 - 23ª tarefa, adição das parcelas 347 e 193

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | |
| | 3 | 4 | 7 |
| + | 1 | 9 | 3 |
| | 5 | 4 | 0 |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A adição das unidades de primeira ordem formou *uma* unidade de segunda e *nenhuma* de primeira (Ilustração 100). O resultado foi registrado com o algarismo zero na primeira ordem, uma seta e o número um (1), sobre a coluna referente à segunda ordem para indicar a formação de mais *uma* unidade. Adicionamos mentalmente as unidades de segunda ordem e obtivemos *quatorze*. Na sequência, rescrevemos *quatro* de segunda ordem e indicamos a formação de *uma* nova terceira ordem (seta e algarismo *um*). O resultado foi *cinco* unidades de terceira ordem, *quatro* de segunda e *nenhuma* de primeira: ou seja, q*uinhentas e quarenta* unidades (540). De modo análogo, resolvemos as demais operações (Ilustração 101):

Ilustração 101 - 23ª tarefa, resolução das operações

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | |
| | 3 | 4 | 7 |
| + | 4 | 7 | 5 |
| | 8 | 2 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | |
| | 3 | 4 | 7 |
| + | 8 | 8 | 6 |
| 1 | 2 | 3 | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | |
| | 3 | 4 | 7 |
| + | 2 | 8 | 7 |
| | 6 | 3 | 4 |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Em cada operação houve a formação interligadas de novas ordens de medidas, por exemplo, *uma* unidade de segunda, gera *uma* unidade de terceira ordem (Ilustração 101).

### 2.4.3 Revisão da adição

**<u>24ª tarefa</u>** (Ilustração 102): Resolva as operações (ДАВЫДОВ *et al*., 2012b).

Ilustração 102 - 24ª tarefa, operações de adição nas bases setenária e novenal

$135_{(7)} + 222_{(7)}$ $\qquad\qquad$ $256_{(9)} + 241_{(9)}$

Fonte: Давыдов *et al*. (2012b, p. 20).

As adições apresentadas na tarefa em estudo (24) serão resolvidas por meio do algoritmo da adição (Ilustração 102). Os números que compõem as operações são constituídos, respectivamente, a partir do sistema de numeração setenário e novenal. Escreveremos as operações em algoritmo e efetuaremos os cálculos (Ilustração 103):

Ilustração 103 - 24ª tarefa, resolução das operações de adição

$$\begin{array}{r} 1\phantom{5_{(7)}} \\ 135_{(7)} \\ +\ 222_{(7)} \\ \hline 360_{(7)} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 1\phantom{6_{(9)}} \\ 256_{(9)} \\ +\ 241_{(9)} \\ \hline 507_{(9)} \end{array}$$

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

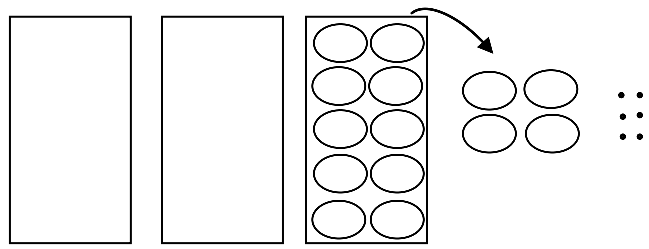
Na primeira operação, o sistema de numeração é o setenário (Ilustração 103). Adicionamos as unidades de primeira ordem e obtivemos *sete*, isto é, *uma* unidade de segunda ordem e *nenhuma* de primeira ($10_{(7)}$). Registramos este procedimento no algoritmo e o resultado final foi *três* unidades de terceira ordem, *seis* de segunda e *nenhuma* de primeira: $360_{(7)}$. Na segunda operação formou *uma* nova unidade de terceira ordem (Ilustração 103). O resultado obtido foi *cinco* unidades de terceira ordem, *nenhuma* de segunda e *sete* de primeira, $507_{(9)}$.

## 2.5 SUBTRAÇÃO COM REAGRUPAMENTO OU TRANSFORMAÇÃO

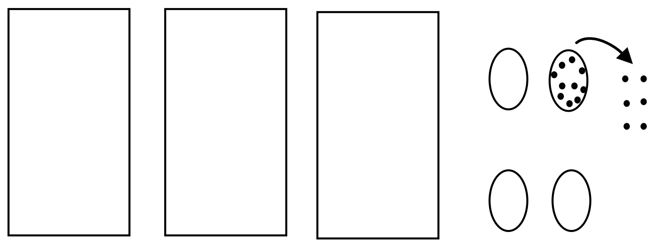
**<u>25ª tarefa</u>** (Ilustração 104): Explique a resolução da primeira operação de subtração e, a partir desta, resolva a outra (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009):

Ilustração 104 - 25ª tarefa, operações de subtração e esquema das ordens

$$\begin{array}{c|c|c|c|} & 2 & 10 & \\ \hline & \cancel{3} & 4 & 6 \\ \hline - & 1 & 7 & 5 \\ \hline & 1 & 7 & 1 \\ \hline \end{array}$$



$$\begin{array}{c|c|c|c|} & & 3 & 10 \\ \hline & 3 & \cancel{4} & 6 \\ \hline - & 1 & 2 & 8 \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$$



Fonte: Давыдов *et al*. (2012b, p. 22).

Na tarefa em estudo, Gorbov, Mikulina e Savieliev (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009) apresentam duas operações de subtração, uma com resolução e outra sem (Ilustração 104). Em ambas está explícito o reagrupamento dos valores por meio do esquema das ordens (pontos, elipses e retângulos). Iniciaremos o desenvolvimento da tarefa por meio da explicação da operação de subtração que contém o resultado (Ilustração 105):

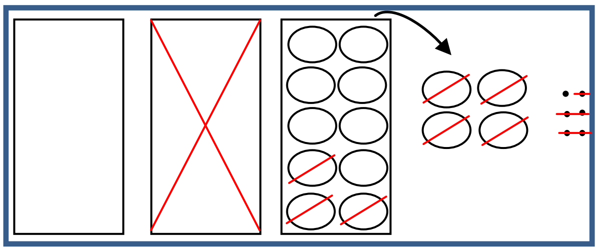
Ilustração 105 - 25ª tarefa, explicação do procedimento de resolução da operação

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 2 | 10 | |
| | ~~3~~ | 4 | 6 |
| - | 1 | 7 | 5 |
| | 1 | 7 | 1 |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Os números que compõem a operação são do sistema de numeração decimal, por isso os agrupamentos são compostos por *dez* unidades. O resultado obtido, ao subtrair as unidades de primeira ordem (6 – 5), foi *um* (1). Para subtrair *sete* de *quatro* unidades de segunda ordem, houve a transformação de *uma* unidade de terceira em *dez* de segunda (Ilustração 105), pois o minuendo é menor que o subtraendo. Deste procedimento resultou *quatorze* unidades de segunda ordem (10 + 4) e *duas* de terceira (3 - 1). O processo de operacionalização resultou em *cento e setenta e um* (Ilustração 105). O movimento de operacionalização por meio do esquema das ordens de medidas será apresentado conforme a ilustração 106:

Ilustração 106 - 25ª tarefa, movimento de operacionalização por meio do esquema das ordens



346 – 175 = 171

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Deste modo, o resultado foi *cento e setenta e um* (171). Procedimento análogo, adotaremos na resolução da última operação (Ilustração 107):

Ilustração 107 - 25ª tarefa, resolução da operação de subtração

3 10

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 3 | ~~4~~ | 6 |
| - | 1 | 2 | 8 |
| | | | |

⇨

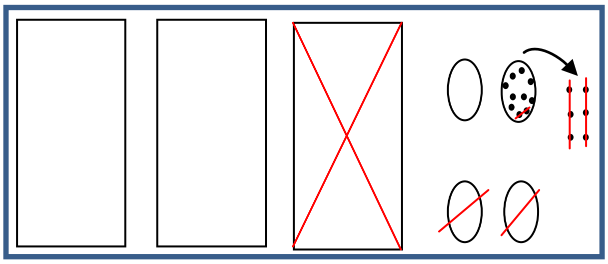
3 10

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 3 | ~~4~~ | 6 |
| - | 1 | 2 | 8 |
| | 2 | 1 | 8 |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Para subtrairmos as unidades de primeira ordem (6 – 8), transformamos *uma* de segunda em *dez* de primeira, e acrescentamos às *seis* existentes, pois não é possível subtrair *oito* unidades de *seis* (Ilustração 107). Deste procedimento, resultaram *dezesseis* (10 + 6) unidades de primeira ordem e *três* de segunda (4 – 1). Na sequência, operacionalizamos a subtração (Ilustração 107) e obtivemos *duzentos e dezoito* (218). Na ilustração 108, apresentaremos o movimento por meio do esquema das ordens:

Ilustração 108 - 25ª tarefa, movimento de operacionalização por meio do esquema das ordens

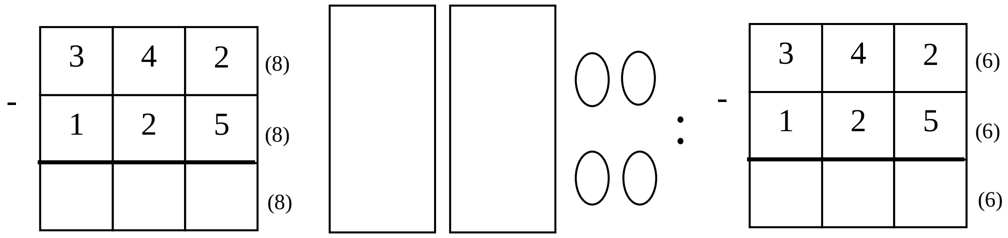


346 – 128 = 218

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

**<u>26ª tarefa</u>** (Ilustração 109): Calcule as operações nas diferentes bases numéricas (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

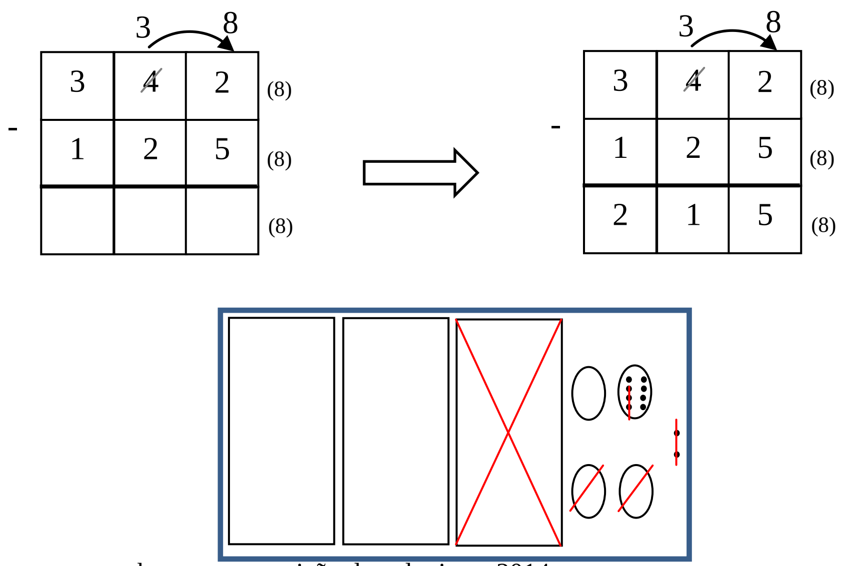
Ilustração 109 - 26ª tarefa, operações a serem resolvidas em diferentes bases numéricas




Fonte: Давыдов *et al*. (2012b, p. 23).

Os valores numéricos do minuendo, nas duas operações, são iguais. O mesmo ocorre com os subtraendos (Ilustração 109). O que difere uma da outra é a base numérica. Em ambas será transformada *uma* unidade de segunda ordem em **n** unidades de primeira ordem. Como o valor dos agrupamentos é diferente em cada base, os resultados também serão (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). O desenvolvimento da presente tarefa será a partir da operação com números no sistema numérico octogenário (Ilustração 110):

Ilustração 110 - 26ª tarefa, resolução da subtração na base octogenária

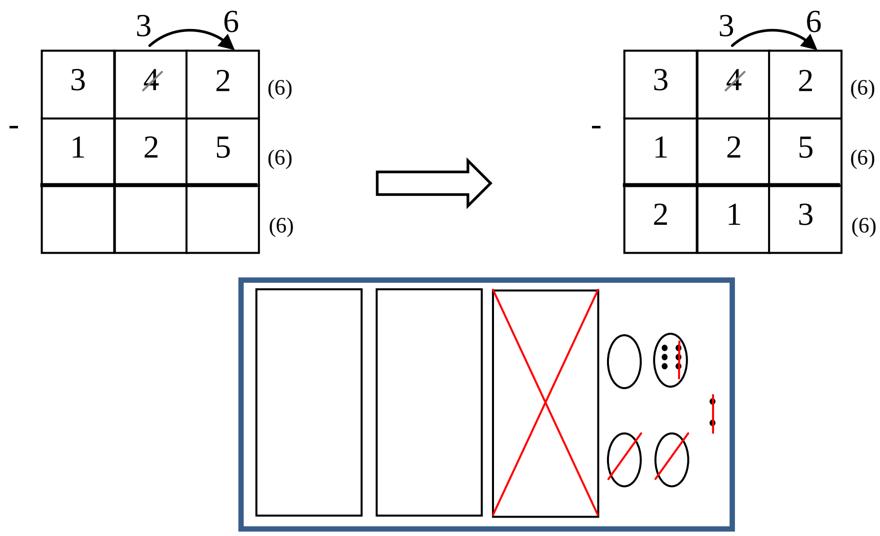



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Para subtrair as unidades de primeira ordem, transformamos *uma* unidade de segunda ordem em *oito* de primeira (Ilustração 110). Da operacionalização resultaram *duas* unidades de terceira, *uma* de segunda e *cinco* de primeira ordem: $215_{(8)}$. Abaixo do algoritmo, apresentamos este movimento por meio do esquema das ordens de medidas (Ilustração 110).

Para finalizar o desenvolvimento da tarefa em estudo, procederemos a resolução da última operação (Ilustração 111):

Ilustração 111 - 26ª tarefa, resolução da subtração na base hexanária




Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

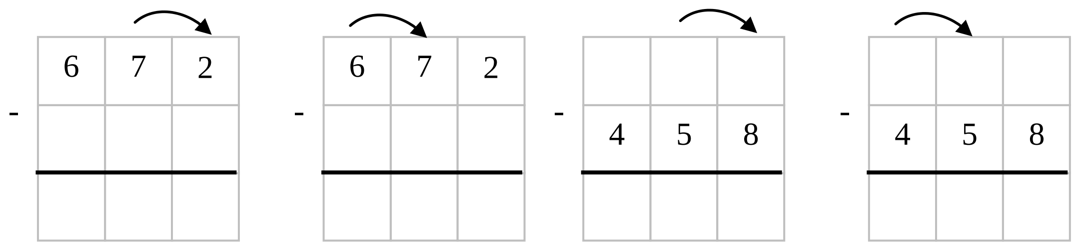
A operacionalização das unidades de primeira ordem requer a transformação de *uma* unidade de segunda ordem em *seis* de primeira (Ilustração 111). Isto porque os números da operação são do sistema de numeração hexanário. O resultado final obtido foi *duas* unidades de terceira, *uma* de segunda e *três* de primeira ordem, $213_{(6)}$.

Embora minuendo e subtraendo das duas operações sejam iguais, o resultado obtido foi $215_{(8)}$ e $213_{(6)}$. Tal divergência consiste no fato de operacionalizarmos com bases numéricas distintas. Nestas, cada unidade da segunda e terceira ordem são compostas por *seis* e *oito* unidades (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

### 2.5.1 Subtração com um reagrupamento ou transformação

**27ª tarefa** (Ilustração 112): Complete e resolva as quatro operações de subtração (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 112 - 27ª tarefa, operações de subtração a serem resolvidas

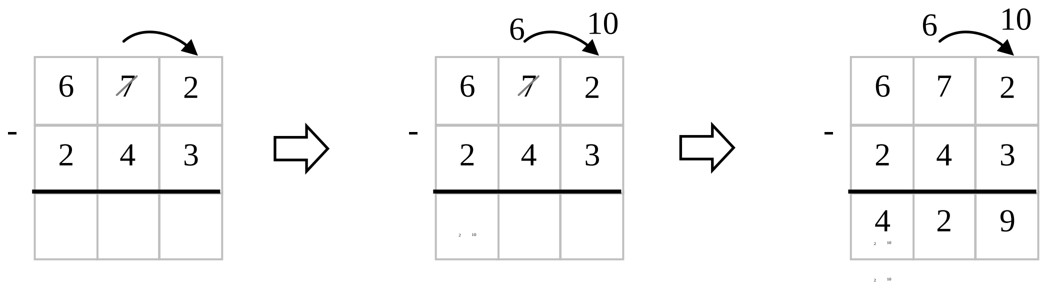



Fonte: Давыдов *et al*. (2012b, p. 24).

Esta tarefa apresenta quatro operações de subtração a serem resolvidas (Ilustração 112). Nas duas primeiras (da esquerda para a direita), falta registrar o subtraendo e, para isso, consideraremos a indicação da seta (esta indica onde ocorrerá a transformação). Nas duas últimas, registraremos o minuendo, também considerando a transformação da ordem a partir da indicação da seta.

Em todas as operações ocorrerá a transformação da primeira ou da segunda ordem (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). Iniciaremos a resolução a partir da primeira operação (Ilustração 113):

Ilustração 113 - 27ª tarefa, registro do subtraendo e resolução da operação




Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Na primeira operação, a seta indica a transformação de *uma* unidade de segunda ordem em *dez* de primeira (Ilustração 113). Portanto, para o registro do subtraendo, consideramos em relação ao minuendo: a unidade de primeira ordem será maior, a de segunda menor (para que não ocorra a transformação da terceira ordem) e a de terceira, obrigatoriamente menor (pois, não há, na tarefa, a quarta ordem para transformar). A partir destas considerações, elegemos o subtraendo *duzentos e quarenta e três* (243).

Operacionalizamos e obtivemos o resultado *quatrocentos e vinte e nove* (429). Similarmente, resolvemos as demais operações (Ilustração 114):

Ilustração 114 - 27ª tarefa, resolução das demais operações

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 5 | 10 | |
| | ~~6~~ | 7 | 2 |
| - | 2 | 9 | 1 |
| | 3 | 8 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 5 | 10 |
| | 5 | ~~6~~ | 5 |
| - | 4 | 5 | 8 |
| | 1 | 0 | 7 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 5 | 10 | |
| | ~~6~~ | 4 | 9 |
| - | 4 | 5 | 8 |
| | 1 | 9 | 1 |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Na primeira operação, fizemos o registro do subtraendo e, nas demais, os minuendos. Para isso, consideramos a indicação das setas e registramos os resultados obtidos (Ilustração 114).

### 2.5.2 Subtração com reagrupamento ou transformação interligada

**28ª tarefa** (Ilustração 115): Marque com a seta onde ocorrerá a transformação e resolva as operações (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 115 - 28ª tarefa, operações a serem resolvidas

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 6 | 0 | 2 |
| - | | 8 | 1 |
| | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 6 | 2 | 0 |
| - | | 8 | 1 |
| | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 6 | 1 | 0 |
| - | | 8 | 1 |
| | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 6 | 8 | 0 |
| - | | 8 | 1 |
| | | | |

Fonte: Давыдов *et al*. (2012b, p. 24).

Nessas subtrações (Ilustração 115), ocorrerá a transformação de ordens interligadas (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009), isto é, mais de um reagrupamento na mesma operação (Ilustração 116):

Ilustração 116 - 28ª tarefa, resolução das operações

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 5 | 10 | |
| | $\cancel{6}$ | 0 | 2 |
| - | | 8 | 1 |
| | 5 | 2 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 10 | |
| | 5 | 1 | 10 |
| | $\cancel{6}$ | $\cancel{2}$ | 0 |
| - | | 8 | 1 |
| | 5 | 3 | 9 |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A operacionalização das unidades (primeira ordem) na primeira operação resultou em *um* (2 - 1= 1). Não houve necessidade da transformação de *uma* dezena (Ilustração 116). Diferentemente ocorreu com a dezena (segunda ordem): para operacionalizá-la, transformamos *uma* centena (terceira ordem) em *dez* dezenas. O resultado final obtido deste procedimento foi *quinhentos e vinte e um* (521).

Na segunda operação (Ilustração 116), transformamos *uma* dezena em *dez* unidades, *uma* centena em *dez* dezenas e obtivemos o resto *quinhentos e trinta e nove* (539). Finalizaremos a tarefa em estudo com a resolução das demais operações, estas ocorrerão do mesmo modo que as anteriores (Ilustração 117):

Ilustração 117 - 28ª tarefa, resolução das demais operações

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 10 | |
| | 5 | 0 | 10 |
| | $\cancel{6}$ | $\cancel{1}$ | 0 |
| - | | 8 | 1 |
| | 5 | 2 | 9 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 10 | |
| | 5 | 7 | 10 |
| | $\cancel{6}$ | $\cancel{8}$ | 0 |
| - | | 8 | 1 |
| | 5 | 9 | 9 |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Nas duas operacionalizações, houve a transformação sucessiva de *uma* dezena em *dez* unidades e *uma* centena em *dez* dezenas (Ilustração 117). Destas subtrações obtivemos os restos *quinhentos e vinte e nove* (529) e *quinhentos e noventa e nove* (599).

### 2.5.3 Subtrações que envolvem novos procedimentos de resolução

**<u>29ª tarefa</u>** (Ilustração 118): Resolva as operações (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 118 - 29ª tarefa, operações de subtração a serem resolvidas

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 7 | 0 | 5 |
| - | 4 | 2 | 5 |
| | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 8 | 2 | 0 |
| - | 6 | 5 | 8 |
| | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 9 | 0 | 0 |
| - | 3 | 0 | 4 |
| | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 7 | 0 | 0 |
| - | 2 | 5 | 7 |
| | | | |

Fonte: Давыдов *et al*. (2012b, p. 30).

Na presente tarefa, há quatro subtrações a serem resolvidas (Ilustração 118). Algumas envolverão novos procedimentos de resolução (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). Como estes serão introduzidos somente na próxima tarefa (30), calcularemos apenas aquelas que envolvem o processo de resolução conhecido. Iniciaremos o desenvolvimento da tarefa pelas duas primeiras subtrações (Ilustração 119):

Ilustração 119 - 29ª tarefa, resolução das operações de subtração

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 6 | 10 | |
| | 7 | 0 | 5 |
| - | 4 | 2 | 5 |
| | 2 | 8 | 0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 10 | |
| | 7 | 1 | 10 |
| | 8 | 2 | 0 |
| - | 6 | 5 | 8 |
| | 1 | 6 | 2 |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Para operacionalizar a primeira subtração, transformamos *uma* unidade de terceira ordem em *dez* de segunda (Ilustração 119), e após todos os cálculos obtivemos o resto: *duzentos e oitenta* (280). A segunda operação requisita a transformação das ordens interligadas. Para tanto, transformamos *uma* dezena em *dez* unidades (para subtrair as unidades) e *uma* centena em *dez* dezenas (para operacionalizar as dezenas). Deste procedimento, resultou *cento e sessenta e dois* (162). Na sequência, apresentaremos as duas últimas subtrações a serem resolvidas (Ilustração 120):

Ilustração 120 - 29ª tarefa, operações que envolvem novos procedimentos de resolução

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 9 | 0 | 0 |
| - | 3 | 0 | 4 |
| | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 7 | 0 | 0 |
| - | 2 | 5 | 7 |
| | | | |

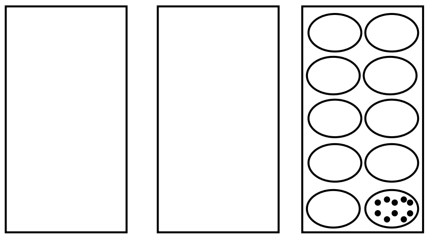
Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A operacionalização das subtrações (Ilustração 121) requer a transformação de *uma* dezena em *dez* unidades. Porém, não há unidades na ordem das dezenas a serem transformadas. Estas operações envolvem um novo procedimento de resolução e, portanto, neste momento não serão calculadas. Davýdov e colaboradores apresentam casos de novo tipo para que os estudantes identifiquem, nas operações, o que impossibilita a resolução, cuja superação dar-se-á no desenvolvimento da próxima tarefa (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

**<u>30ª tarefa</u>** (Ilustração 121): Explique como foi realizada a operacionalização abaixo (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 121 - 30ª tarefa, operação para explicar o procedimento de resolução

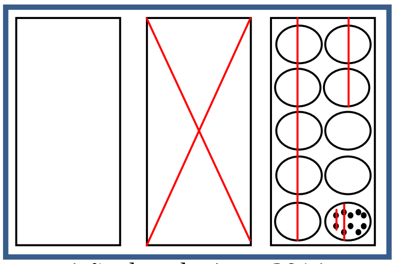
| | 2 | $\overset{9}{\cancel{10}}$ | 10 |
|---|---|---|---|
| | 3 | 0 | 0 |
| - | 1 | 7 | 4 |
| | 1 | 2 | 6 |



Fonte: Давыдов *et al*. (2012b, p. 30).

No minuendo da operação apresentada na ilustração 121, não há dezenas e unidades, pois todas estão agrupadas em centenas. Isso exige a transformação de *uma* dezena em *dez* unidades, mas para tal, primeiro foi transformada *uma* centena em *dez* dezenas. Após este procedimento foi possível transformar *uma* dezena em *dez* unidades, e restaram *nove* dezenas. Por decorrência, resultou *cento e vinte e seis* (126). O movimento de transformação das ordens por meio do esquema consiste no seguinte (Ilustração 122):

Ilustração 122 - 30ª tarefa, resultado obtido por meio do esquema



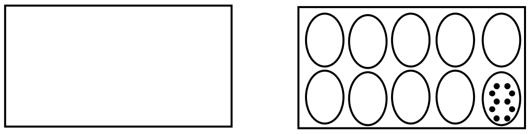
Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

**<u>31ª tarefa</u>** (Ilustração 123): Resolva a operação (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 123 - 31ª tarefa, operação de subtração a ser calculada

10

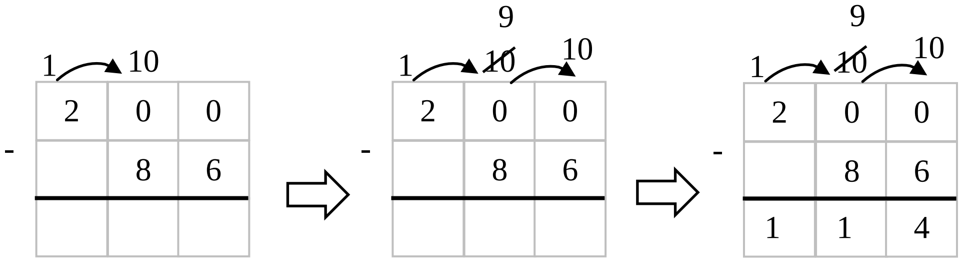
| | | | |
|---|---|---|---|
| | 2 | 0 | 0 |
| - | | 8 | 6 |
| | | | |



Fonte: Давыдов *et al*. (2012b).

Para a resolução da tarefa (31), tomar-se-á os procedimentos desenvolvidos na tarefa anterior (30), ou seja, a transformação de uma dezena depende da transformação de uma centena. Na operação, contém a indicação da transformação de *uma* centena em *dez* dezenas (Ilustração 123) e a representação deste processo. A resolução da operação se explicita no algoritmo (Ilustração 124):

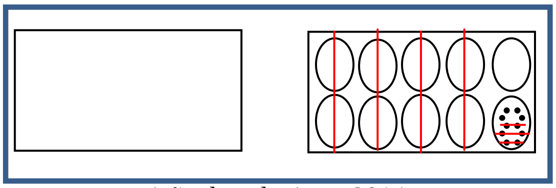
Ilustração 124 - 31ª tarefa, cálculo da operação por meio do algoritmo



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

No esquema de representação das ordens temos (Ilustração 125):

Ilustração 125 - 31ª tarefa, resultado expresso por meio dos esquemas



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A operação indicava a transformação de *uma* centena em *dez* dezenas (Ilustração 123), logo, transformamos *uma* dezena em *dez* unidades. Após este procedimento, o minuendo resulta em *uma* centena, *nove* dezenas e *dez* unidades. Deste, subtraímos *oito* dezenas e *seis* unidades e obtivemos o resto, *cento e quatorze* (114).

**<u>32ª tarefa</u>** (Ilustração 126): Calcule as operações de subtração (ДАВЫДОВ *et al*., 2012b).

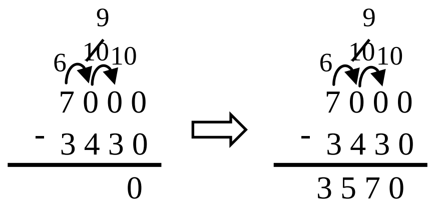
Ilustração 126 - 32ª tarefa, operações a serem calculadas

$$\begin{array}{r} 7000 \\ -\ 3430 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1000 \\ -\ \ 11 \\ \hline \end{array}$$

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

As duas subtrações a serem resolvidas (Ilustração 126) são compostas por números decimais. No processo de resolução, ocorrerão transformações interligadas. Iniciaremos a resolução da tarefa com a operacionalização de 7000 – 3430 (Ilustração 127):

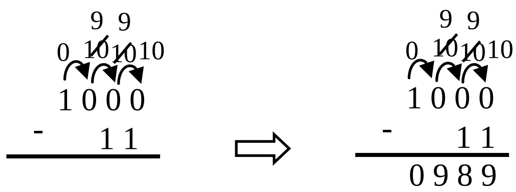
Ilustração 127 - 32ª tarefa, operacionalização de 7000 – 3430



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A operacionalização das unidades resultou em *zero* (0 – 0 = 0). Em relação às dezenas, primeiramente transformamos *uma* unidade de milhar em *dez* centenas, pois não havia unidades de terceira ordem para transformarmos em dezenas (Ilustração 127). Desse processo, resultaram *seis* unidades de milhar, *nove* centenas e *dez* dezenas, e, como resto: *três mil quinhentos e setenta* (3570). Na sequência, resolveremos a subtração 1000 – 11 (Ilustração 128):

Ilustração 128 - 32ª tarefa, resolução da operação 1000 – 11

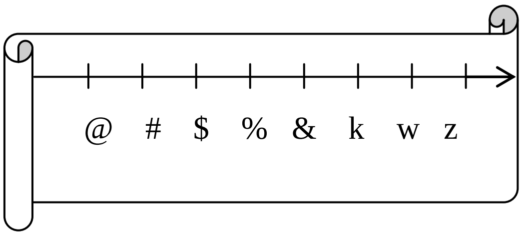


Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Para operacionalizarmos (Ilustração 128), iniciamos a transformação pela unidade de milhar, pois, não havia unidades nas demais ordens. Deste procedimento, a composição do minuendo resultou em: *nenhuma* milhar, *nove* centenas, *nove* dezenas e *dez* unidades. Subtraímos *uma* unidade e *uma* dezena do minuendo, por decorrência o resto é: *novecentos e oitenta e nove* (989).

**<u>33ª tarefa</u>** (Ilustração 129): Calcule as adições (ДАВЫДОВ *et al.*, 2012b).

Ilustração 129 - 33ª tarefa, adições a serem calculadas




| | | |
|---|---|---|
| 8 + 3 | 7 + 4 | 9 + 2 |
| 18 + 3 | 17 + 4 | 19 + 2 |
| 38 + 3 | 47 + 4 | 19 + 3 |
| $8 + 3 | w7 + 4 | @9 + 3 |

Fonte: Давыдов *et al.* (2012b).

O desenvolvimento da presente tarefa consiste na resolução das adições apresentadas na ilustração 129. Nas operações compostas por números abstratos, utilizaremos a reta numérica para auxiliar o processo de determinação da soma correspondente. Em todas as adições ocorrerá a formação de *uma* nova dezena (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). Na sequência, apresentaremos a resolução das adições que não possuem números abstratos em sua composição (Ilustração 130):

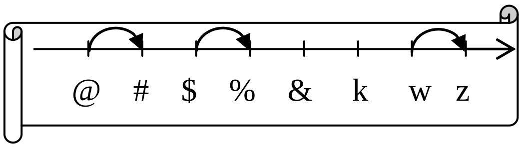
Ilustração 130 - 33ª tarefa, resoluções das adições com algarismos hindu-arábicos

| | | |
|---|---|---|
| 8 + 3 = 11 | 7 + 4 = 11 | 9 + 2 = 11 |
| 18 + 3 = 21 | 17 + 4 = 21 | 19 + 2 = 21 |
| 38 + 3 = 41 | 47 + 4 = 51 | 19 + 3 = 22 |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Conforme previsto por Davýdov e colaboradores, nessas adições se apresentam a formação de *uma* nova dezena e sobra de *uma* unidade, exceto na última operação que excederam *duas* unidades (Ilustração130). Apresentaremos, a seguir, a resolução das adições compostas por números abstratos (Ilustração 131):

Ilustração 131 - 33ª tarefa, resolução das adições compostas por números abstratos



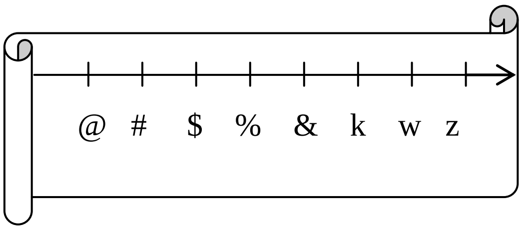

$8 + 3 = %1 w7 + 4 = z1 @9 + 3 = #2

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Embora não possamos determinar aritmeticamente o resultado das operações, foi possível resolvê-las com o auxílio da reta numérica. Na primeira operação ($8 + 3 =___), por exemplo, adicionamos 8 + 3 e obtivemos *onze* (11) unidades. Destas, agrupamos *dez* em *uma* dezena. Como a operação é composta por número abstrato, adicionamos *uma* unidade de segunda ordem (uma dezena) ao número *$* ($ dezenas) na reta (Ilustração 131), e obtivemos *%* dezenas: assim, $8 + 3 = %1. De modo análogo, nas três adições subsequentes houve a formação de *uma* nova dezena.

**34ª tarefa** (Ilustração 132): Determine os minuendos e subtraendos, os adicionandos e adicionadores da segunda e terceira coluna com base na primeira (ДАВЫДОВ *et al*., 2012b).

Ilustração 132 - 34ª tarefa, subtrações e adições a serem operacionalizadas




| | | |
|---|---|---|
| 13 - 5 | 21 - 5 | 18 + 5 |
| 23 - 5 | $\square - \square$ | $\square + \square$ |
| 43 - 5 | $\square - \square$ | $\square + \square$ |
| $3 - 5 | %1 -5 | #8 + 5 |

Fonte: Давыдов *et al*. (2012b).

A presente tarefa é composta por adições e subtrações (Ilustração 132), em que tanto o subtraendo quanto o adicionador são compostas por *cinco* unidades. Na operacionalização da subtração ocorrerá a transformação de *uma* dezena e, na adição, a formação de *uma* nova dezena. A reta numérica auxiliará na resolução daquelas operações compostas por números abstratos, o que adotaremos a partir da primeira coluna (Ilustração 133):

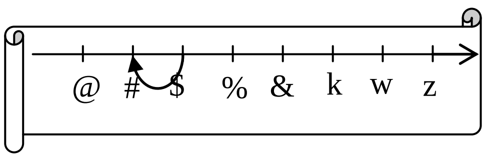
Ilustração 133 - 34ª tarefa, resolução das operações que compõem a primeira coluna

13 – 5 = 8

23 – 5 = 18

43 – 5 = 38

$3 – 5 = #8




Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Nas três primeiras operações subtraímos *cinco* unidades do minuendo que levou à obtenção de *oito* unidades e *uma* unidade a menos de dezena que a do minuendo (Ilustração 133). Em todas as subtrações houve a transformação de *uma* dezena, inclusive na última que, para determinarmos a dezena, localizamos na reta o número *$* e diminuímos *uma* unidade, resultando em #. Na sequência, apresentaremos a resolução da segunda coluna (Ilustração 134):

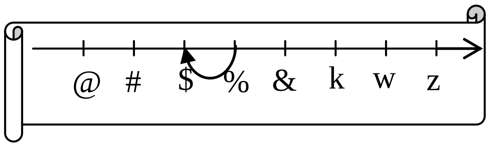
Ilustração 134 - 34ª tarefa, resolução das operações que compõem a segunda coluna

21 – 5 = 16

$\boxed{31} - \boxed{5} = 26$

$\boxed{41} - \boxed{5} = 36$

%1 – 5 = $6




Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A operacionalização da primeira subtração resultou em *seis* unidades e *uma* dezena, pois transformamos *uma* dezena das duas que havia (Ilustração 134). A partir deste raciocínio e daquele utilizado na primeira coluna, elegemos os minuendos (31 e 41) e subtraendos (5) das duas operações. Nestas, o resultado consistiu em *seis* unidades e *uma* dezena a menos que a do minuendo. Na última operação (%1 – 5 =___), para subtrairmos as unidades, reagrupamos *uma* dezena em *dez* unidades. Porém, a dezena *%* é um número abstrato. Para operacionalizá-la utilizamos a reta numérica (% - 1), o que resulta *$* dezenas. Deste modo, a diferença também foi *seis* unidades e *uma* dezena a menos que a do minuendo (%1 – 5 = $6). Finalizaremos com a resolução das operações que compõem a terceira coluna (Ilustração 135):

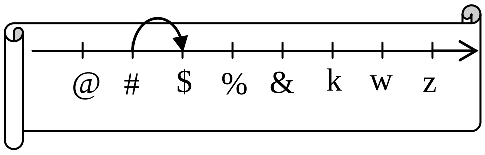
Ilustração 135 - 34ª tarefa, resolução das operações que compõem a terceira coluna

$$18 + 5 = 23$$

$$\boxed{28} + \boxed{5} = 33$$

$$\boxed{38} + \boxed{5} = 43$$

$$\#8 + 5 = \$3$$




Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A execução operacional da primeira adição lava à obtenção de *três* unidades e *duas* dezenas, pois, houve a formação de *uma* nova unidade de segunda ordem (Ilustração 135). A partir da primeira resolução e do procedimento semelhante ao utilizado para a primeira e segunda colunas, elegemos os números das próximas duas operações. O resultado foi: *três* unidades e *uma* nova dezena. Para calcularmos a última operação, tomamos a reta como referência para chegar ao resultado *três* unidades e *$* (# + 1) dezenas.

Conforme Gorbov, Mikulina e Savieliev (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009), o desenvolvimento das tarefas apresentadas no decorrer do presente capítulo ocorre a partir do seguinte movimento: são apresentadas tarefas que, ou não podem ser resolvidas por métodos conhecidos ou, se possível, são trabalhosas. A partir destas, os estudantes são orientados a revelarem a relação para o novo método de resolução e a abstraem no processo de modelação. As características desta relação são estudadas por meio da transformação do modelo e permitem a resolução de outras tarefas. A reflexão teórica deste movimento constitui o próximo capítulo da presente dissertação.

# 3 A UNIDADE ENTRE O LÓGICO E O HISTÓRICO REFERENTE AO SISTEMA DE NUMERAÇÃO E AS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO NA CONEXÃO DIALÉTICA ENTRE O UNIVERSAL, O PARTICULAR E SINGULAR

Neste capítulo apresentaremos as reflexões teóricas sobre os dados de pesquisa, descritos, explicados e analisados no segundo capítulo. A base teórica para a realização das reflexões consistiu nos fundamentos filosóficos, psicológicos, matemáticos e didáticos da Teoria Histórico-Cultural. Assim, o estudo dos fundamentos da lógica formal e sua expressão na mais atual orientação brasileira para o ensino de Matemática nos primeiros três anos de escolarização, e o Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa – PNAIC (BRASIL, 2014b) também embasam esta análise.

O foco das reflexões incidiu nas relações internas do sistema de numeração e das operações de adição e subtração nas diferentes bases numéricas. A hipótese é que o movimento conceitual adotado na proposição de ensino davydoviana, para a operacionalização do sistema de numeração, contemplava a unidade entre o lógico e o histórico. Ainda, que esse movimento conceitual expressava-se na conexão dialética existente entre o universal, o particular e singular. Portanto, o objetivo foi investigar tal movimento.

Iniciamos o processo de análise a partir do conceito do sistema de numeração. Para reproduzirmos teoricamente esse conceito, percorremos o procedimento de ascensão do abstrato ao concreto. Nesse procedimento consideramos o processo de mudança do sistema de numeração, que vai do sensorial ao racional, por meio das etapas objetal, gráfica, literal e numeral, e o seu desenvolvimento por meio das diferentes bases numéricas. Deste, revelamos a relação essencial do sistema de numeração, pois esta constitui o meio para reflexão de tal movimento, a lógica desse sistema.

As análises iniciais apresentadas no segundo capítulo serviram de base para a investigação da relação essencial das operações de adição e subtração. Isso porque, no sistema conceitual, tal relação é o contínuo desenvolvimento da interconexão do outro. No caso do objeto de estudo em referência, a essência do sistema de numeração é o contínuo desenvolvimento da essência das operações.

As reflexões teóricas mencionadas, atreladas às relações de superação da lógica formal, constituem o conteúdo do presente capítulo. Para tanto, iniciamos com as categorias do lógico e do histórico, que são de ampla importância para a compreensão da essência do conhecimento[17] e para captar o processo de cognição, de aquisição desse conhecimento (ROSENTAL, 1960). A história dos conhecimentos é marcada por ziguezagues, avanços, retrocessos, etapas acidentais, entre outros. A cognição é realizada por meio da reprodução do processo histórico, mas não em sua integridade. Isso significa que é imprescindível "selecionar o que é secundário do que é principal, o que é necessário do que é acidental, etc..." (DUARTE, 1987, p. 13). Para tanto, é importante se conhecer a essência da evolução histórica: o lógico. Este "*é o histórico liberado das casualidades que o perturbam*" (KOPNIN, 1978, p.184, grifos do autor). Entretanto, em que consistem os ziguezagues, os avanços, retrocessos e as etapas acidentais na história do sistema de numeração?

De acordo com Vygotisk (1996), contar nos dedos foi, em seu tempo, uma conquista cultural importante. Serviu de ponte para a humanidade passar da aritmética natural para a cultural, da percepção das quantidades para o cálculo. Com a necessidade de realizar contagens maiores, estabeleceram-se relações de correspondência. Destas, a mais utilizada atualmente é a de um para dez. Porém, durante o desenvolvimento histórico do sistema de numeração, houve outras relações como, por exemplo, a base numérica quinária (correspondência um a cinco) que, segundo Eves (2004), foi a primeira utilizada. Historicamente, a humanidade passou a adotar a correspondência um a dez, base decimal, "[...] pelo fato de que temos cinco dedos em cada mão" (DUARTE, 1987, p. 56). O resultado da contagem era registrado no ábaco. De acordo com Duarte (1987, p. 59), o "ábaco surgiu inicialmente como uma forma de registro do resultado da contagem. Mas com o tempo ele tornou-se também instrumento de cálculo". A criação do sistema posicional escrito foi possível por meio da criação de um símbolo que representasse a coluna vazia do ábaco: o zero. Isto porque não seria possível a "numeração posicional funcionar adequadamente sem um símbolo para uma posição ou lugar vazio" (GUNDLACH, 1992, p. 11).

Uma das orientações do Pacto Nacional Pela Alfabetização na Idade certa[18] (BRASIL, 2014b, p. 10) para o ensino do sistema de numeração reside no emprego dos dedos:

---

[17] O termo conhecimentos "designa a unidade da abstração, a generalização e o conceito" (DAVÍDOV, 1988, p. 154).

[18] O documento prevê a alfabetização e o letramento das crianças brasileiras até oito anos de idade.

“o uso dos dedos deve ser valorizado na prática pedagógica como uma das práticas mais importantes na construção do número pela criança [...]”. Justifica-se que, “ao contar nos dedos, a criança em alfabetização está efetivamente fazendo Matemática e se constituindo em um ser matemático” (BRASIL, 2014b, p. 11). Porém, cabe questionar: ser de que época? Primitivo ou contemporâneo? Ainda de acordo com o documento oficial, “na Alfabetização Matemática, o uso dos dez algarismos deve ficar restrito ao trabalho do agrupamento decimal e deve estar associado à estrutura do corpo humano e a questões vinculadas à utilização dos dedos como base da contagem” (BRASIL, 2014b, p. 29). No contexto do emprego dos dedos como instrumento de apoio a representações numéricas, sugere-se a inclusão do ábaco. A “tendência de chamar os colegas para “emprestar” dedos para fazer contagens maiores pode ser tomada pelo professor, especialmente nos 2º e 3º anos, como pretexto para trazer a ideia do ábaco humano” (BRASIL, 2014b, p. 13, grifos dos autores).

> A orientação para utilização dos dedos e de risquinhos, embora oriunda de um estágio inicial do desenvolvimento histórico da Matemática, também aparece nos livros didáticos brasileiros. Isso significa dizer que as proposições brasileiras para o ensino de Matemática no primeiro ano do Ensino Fundamental, em sua maioria, contemplam o estágio inicial do desenvolvimento do conceito de número pela humanidade em detrimento de seu estágio atual (ROSA, 2012, pp. 191-192).

Enfim, a mais atual orientação nacional para a introdução do sistema de numeração, assim como de alguns livros didáticos (DAMAZIO, ROSA e EUZÉBIO 2012), apoiam-se na contagem da grandeza discreta, sugerem a utilização dos dedos e do ábaco nos limites da base dez. Contudo, a base decimal é apenas uma das que compõem o sistema de numeração.

A contagem dos dedos e dos mais variados tipos de materiais toma como referência apenas a grandeza discreta. No entanto, os números, em seu estágio atual de desenvolvimento, foram criados a partir das relações entre grandezas não só discretas, mas também contínuas (ROSA, 2012).

> A ênfase apenas na representação visual das quantidades de objetos soltos, relacionados ao dia-a-dia das crianças ou não, reduz o conteúdo do conceito de número as suas significações empíricas, próprias do estágio inicial do desenvolvimento do conceito de número pela humanidade, em detrimento do conteúdo teórico, em seu estágio atual de elaboração (ROSA, 2012, p. 230).

O ponto de partida da orientação nacional também incide na ação objetal (BRASIL, 2014b). Esta propõe uma relação direta entre a quantidade de objetos e sua representação numérica: entre o material dourado, palitos, unidades do ábaco humano (dedos) e o numeral. É importante ressaltar que o ábaco, em um determinado estágio do desenvolvimento histórico do sistema de numeração, foi um avanço e, mais tarde, em relação à numeração escrita, se constituiu em retrocesso. Como afirmam Grossnickle e Brueckner (1965, p. 35), embora "o ábaco tenha contribuído para que o homem aumentasse de muito sua capacidade em usar números, essa mesma invenção impediu, mais tarde, o progresso. [...] O zero não foi uma necessidade enquanto foi possível usar o ábaco".

Então, o que significa considerar o lógico e o histórico em relação ao sistema de numeração? O histórico é "o processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento" (KOPNIN, 1978, p. 183). Neste sentido, na presente investigação será considerado o processo de mudança do sensorial ao racional, por meio das etapas objetal, gráfica, literal e numeral, em seu estágio atual, livre dos ziguezagues e retrocessos históricos. O lógico, por sua vez, é o meio pelo qual o pensamento reflete o histórico, mas, de forma teórica, trata-se da "reprodução da essência do objeto e da história do seu desenvolvimento no sistema de abstrações" (KOPNIN, 1978, p. 183-184). É importante ressaltar que o lógico e o histórico são categorias da lógica dialética, não surgiram na "lógica formal, já que esta não estuda os fenômenos nem os objetos em seu desenvolvimento e mudança, com seus aspectos sujeitos a transformações" (ROSENTAL, 1960, p. 328).

Os conceitos, afirma Rosental (1960), não surgem arbitrariamente da mente do homem. O ponto de partida do conhecimento é a relação prática. Assim, "os conceitos nascem da prática e resumem, sintetizam o que previamente está dado na vida real, na prática" (ROSENTAL, 1960, p. 328). A prática, no sistema de numeração, consiste na relação entre grandezas (a ação objetal). Esta, a depender do processo de abstração, generalização e formação do conceito, resulta em um determinado conhecimento que promove o desenvolvimento do pensamento teórico ou empírico.

O pensamento teórico é constituído pelo conteúdo existente como essência mediatizada, com base em análises e reflexões das características internas dos objetos ou fenômenos, e não como algo dado diretamente à percepção (DAVÝDOV, 1982), tal como ocorre na relação direta entre a quantidade de objetos e o numeral. Em vez das características externamente dadas, o pensamento teórico reflete as relações internas e as leis do movimento do conhecimento, consiste no processo reprodutivo da relação universal do objeto. Na especificidade do sistema de numeração, isso ocorre a partir da relação entre grandezas, inicialmente, por meio do experimento objetal sensorial (medição de volumes com líquido, áreas de superfícies, entre outros). Posteriormente, estes experimentos são elevados gradualmente ao plano mental (DAVÝDOV, 1982).

Esse movimento de reprodução teórica é contemplado na proposição davydoviana para o ensino do sistema de numeração. Sua introdução ocorre a partir da medição (relação entre grandezas, na qual uma delas é tomada como unidade de medida da outra). Neste sentido, a medição está diretamente vinculada à " determinadas ações objetal cognitivas" (DAVÍDOV, 1988, p. 153). Medir é "*comparar* duas grandezas [discretas e contínuas] da mesma espécie – dois comprimentos, dois pesos, dois volumes, etc." (CARAÇA, 1951, p. 29, grifo do autor). Do processo de medição, emergem as diferentes ordens do sistema de numeração que, depois de abstraídas e generalizadas, são elevadas ao plano mental. Posteriormente, ocorre o movimento inverso, da formação das diferentes ordens para a ação objetal de medição.

O experimento realizado no plano mental é composto por alguns elementos elencados por V. Bíbler (*apud* DAVÝDOV, 1982). O primeiro deles consiste na revelação da essência, uma vez que a elevação do sensorial objetal ao plano mental requer a compreensão das características internas do objeto. A formação das diferentes ordens do sistema de numeração consiste na seguinte essência: a unidade de medida de segunda ordem é *n* vezes a unidade de medida de primeira ordem, e a unidade de medida de terceira ordem é *n* vezes a de segunda ordem; *n é* a base considerada. No segundo elemento do experimento mental elencado por Bíbler (*apud* DAVÍDOV, 1988), a essência revelada torna-se objeto de transformações mentais. Assim, a partir da essência concernente ao sistema de numeração é possível transformar uma mesma medida nas diferentes bases numéricas. Esses dois elementos formam a base do pensamento teórico, que já não opera com as representações diretas do processo de medição, mas com conceitos. O conceito teórico é, ao mesmo tempo, o meio de reprodução mental da essência do objeto e a forma de reflexo deste. A expressão do objeto em forma de conceito revela a compreensão de sua essência.

Na especificidade do sistema de numeração, conhecer sua essência significa abordá-lo dialeticamente; isto é, compreendê-lo em sua origem e desenvolvimento das características e qualidades no processo de sua formação. Em outras palavras, significa capta-lo não em sua forma primitiva e nem como um produto acabado, mas como resultado de certo movimento. Essa é a lei do conhecer “que permite penetrar na essência das coisas, retirar delas os véus enganosos e os equívocos que ocultam sua verdadeira essência” (ROSENTAL, 1960, p. 331). Assim, não é possível imaginar a formação das diferentes ordens do sistema de numeração sem reconstruí-las mentalmente a partir de sua origem por meio da ação prática objetal.

Os meios próprios para a reprodução do sistema de numeração são os modelos: objetal (como o desenho do processo de medição dos volumes, áreas das superfícies...), gráfico (reta numérica, esquemas compostos por segmentos e arcos) e literal (letras). A característica essencial desses modelos “é que combinam o sentido abstrato com o impacto visual do objeto” (DAVÍDOV, 1988, p. 213). O processo de medição realizado no plano objetal não some, mas é incorporado no modelo gráfico e literal. Nesse movimento, a reprodução do sistema de numeração passa pela transformação do modelo objetal em modelo gráfico e, posteriormente, literal. Nestes, revelamos e recriamos as propriedades do sistema de numeração, tais como unidades de medidas, formação das ordens, agrupamentos, bases numéricas, valor posicional, entre outras. A revelação e a expressão em modelos “da existência mediatizada das coisas, de sua universalidade, não é outra coisa senão a passagem à reprodução teórica da realidade” (DAVÍDOV, 1988, p. 127). Assim, a passagem da ação objetal para a mental é mediada por um sistema de símbolos interconectados sustentado em um movimento de sucessivas abstrações da relação universal, essencial.

De acordo com Davýdov (1982), os símbolos que expressam o universal dos objetos são formas de atividade humana. Na ação prática, os símbolos são utilizados para obtenção da essência de um conceito. A essência, expressa por meio de símbolos, dá conta das manifestações particulares.

A essência do conceito é revelada no processo de sua reconstrução, desde sua origem. Para tanto, no processo de ensino e aprendizagem do sistema de numeração, é necessário formar agrupamentos com as devidas regularidades. Esta é a origem do referido sistema: ao se tomar *n* como a base, a formação da unidade de medida de segunda ordem consiste em *n* vezes a unidade de medida de primeira ordem, a unidade de terceira ordem é *n* vezes a de segunda ordem e assim sucessivamente.

Conforme mencionado, historicamente o sistema de numeração surgiu da necessidade humana de indicar quantidades elevadas com o mínimo possível de símbolos. Para tanto, foi necessário formar agrupamento com as devidas regularidades (IFRAH, 1997).

No processo de cognição, os símbolos são primários em relação as suas aplicações. Os conceitos teóricos são captados e assimilados pelos indivíduos antes de atuarem com suas manifestações empíricas particulares (aplicações). De acordo com Davýdov (1982), foram produzidos historicamente, existem objetivamente nas formas de atividade humana e em seus resultados (objetos criados de modo racional). Os estudantes não criam conceitos, mas apropriam-se deles no processo de sua reprodução.

As tarefas davydovianas abarcam a relação universal do sistema de numeração em seu desenvolvimento e movimento. Para Davýdov (1982), o objeto muda e passa a ser outro, mas não desaparece, pois está inserido em um sistema mais amplo. Logo, o processo de medição, demonstrado por meio da relação entre as grandezas, não desaparece ao ser reproduzido nos esquemas. Ao contrário, torna-se mais amplo por ser válido para qualquer grandeza e não uma em particular.

Assim, o sistema de numeração na proposição davydoviana não é apresentado como algo acabado e definitivo, mas a partir das condições que o geraram, as relações entre grandezas. Desta forma, os conceitos passam

> por um complexo processo de desenvolvimento e seu estado atual não é mais que um produto de todo o desenvolvimento anterior [...], só podem ser conhecidos se estuda-se sua aparência, as condições que o gerou, recorre-se as mesmas fases que segue em seu desenvolvimento [histórico] (ROSENTAL, 1960, p. 332).

Antes de atingir o atual estágio de desenvolvimento, o sistema de numeração percorreu fases importantes para o processo de cognição, tais como a objetal, a gráfica, a numeral e a literal. Além disso, a lógica que propicia a formação das diferentes ordens deve refletir o processo histórico que o sistema de numeração sofreu em seu desenvolvimento. Porém, é importante ressaltar que não se trata de uma sequência linear, mas de um movimento marcado por idas e vindas.

Nas tarefas davydovianas, inicialmente o indivíduo se depara com as mudanças externas dos objetos, em suas relações isoladas, por meio da medição das grandezas contínuas ou discretas. Neste sentido, são realizadas medições isoladas de determinados volumes, áreas, comprimentos, grandezas discretas, entre outras. Caso a proposição se limitasse a esse estágio inicial e logo se procedesse a representação aritmética da medida, esta seria uma constatação empírica de um fato isolado, sem explicitação de como e porque ocorrem as mudanças e as transformações mútuas das diferentes bases, desde o plano objetal e gráfico até o literal e o numeral. Em outras palavras, trata-se da interconexão entre as significações geométricas (primeiro no plano objetal, a partir das relações entre grandezas e, depois, graficamente), algébricas (literal) e aritméticas (numeral).

O movimento percorrido do processo de medição até a representação numérica é mediado pelos esquemas. Estes são válidos para representar aquelas quantidades referentes a quaisquer grandezas, e não apenas uma delas isolada, até no interior de uma mesma base. O esquema possibilita a geração, ainda em estágio inicial, da relação essencial de uma determinada base particular, mas com explicitação para as regularidades válidas para qualquer base numérica do sistema de numeração como um todo. Assim, a lógica do conhecimento se desenvolve do simples ao complexo (ROSENTAL, 1960); da relação entre as grandezas ao sistema de numeração.

A constatação empírica da medição apresentada, por exemplo, no segundo recipiente da Ilustração 3 (p. 43), não revela como e porque seu resultado aritmético é $23_{(5)}$. Diferentemente do que ocorre no esquema da mesma ilustração em referência, trata-se da reta numérica, contexto matemático do conceito de número (ROSA, 2012).

As relações isoladas entre as grandezas são examinadas apenas como momento inicial do processo de reprodução do sistema de numeração. A medição de uma mesma quantidade de diferentes grandezas pode intercorrer nas diversas bases. Isso porque a mudança de base numérica ou da grandeza em medição não interfere na lógica interna do sistema de numeração, na sua essência.

O lógico "por ser reflexo 'corrigido'[19] do histórico, ao refletir no pensamento, [...] a lógica da realidade objetiva, nem sempre pode seguir fielmente o curso do desenvolvimento histórico, chegando em alguns casos a desviar-se inclusive da trajetória histórica"

---

[19] "Engels chamava de reflexo 'corrigido' ao reflexo lógico do desenvolvimento histórico; desse modo, queria dizer que este reflexo não segue passivamente o curso histórico do desenvolvimento dos fenômenos, mas que esclarece a necessidade deste desenvolvimento, captando o mais importante e essencial dele" (ROSENTAL, 1960, p. 341, grifos do autor).

(ROSENTAL, 1960, p. 343, grifos do autor). Isso ocorre, de acordo com o autor em referência, pela necessidade do lógico refletir profundamente a essência do objeto.

A essência mencionada refere-se ao pensamento teórico que tem conteúdo diferente do pensamento empírico. O conteúdo do pensamento empírico é o conjunto de características comuns dos objetos (ROSENTAL, 1962). No pensamento teórico, os fenômenos são inter-relacionados e compõem um sistema integral. Fora deste sistema composto por esquemas, regularidade dos agrupamentos, formação das diferentes ordens, a partir da grandeza em medição, o resultado, registro aritmético, seria expresso apenas empiricamente. Cada base numérica compõe um sistema. Os diferentes sistemas, as diferentes bases conformam um sistema mais amplo, o de numeração. Neste, existe uma lógica de interconexão das diferentes bases numéricas, o que não ocorre nas proposições que se limitam a uma única base.

Nas dependências empíricas, o processo de medição de uma grandeza qualquer, a partir de determinada base numérica, constitui uma realidade independente, isolada. De outro modo, se esse processo é revelado teoricamente, sua expressão é realizada por meio de esquemas válidos para qualquer grandeza, no interior do sistema de numeração. A passagem da ação sensorial objetal ao plano mental, quando mediada pelos esquemas que representam a relação essencial, a conexão interna, constitui o objeto do pensamento teórico. Este pensamento, em relação ao número, inicialmente, lida com coisas reais como, por exemplo, medições de volume de líquidos, comprimentos de segmentos, contagem de objetos, etc., dados sensorialmente. A relação expressa pelo movimento visível entre as grandezas constitui a conexão interna do sistema de numeração, objetivada nos esquemas. Como ensina Marx (1988), a finalidade da ciência é reduzir os movimentos visíveis, aparentes, em reais e interiores.

Segundo Davýdov (1982), a diferença entre os conteúdos do pensamento empírico e teórico originou a diferença de suas formas. No empírico, os resultados das observações diretas e externas são descritas verbalmente. Desse procedimento são classificadas as características substanciais que formam as classes, estas compõem as representações gerais dos conceitos empíricos. “A repetição externa, a semelhança, a separação, são as propriedades gerais da realidade captadas e ‘esquematizadas’ pelos conceitos empíricos” (DAVÍDOV, 1988, p. 130, grifos do autor).

No pensamento teórico, a essência do sistema de numeração não é dada diretamente à observação objetal, mas revelada no processo de formação dos esquemas. Na passagem do plano objetal para o plano gráfico e deste para o mental reside a essência da mediatização, da formação do sistema de numeração como um todo, a partir das diferentes bases em interação. Tal como ocorreu no desenvolvimento histórico do conhecimento, que vai se "aprofundando no processo que parte do fenômeno, dos aspectos externos que saltam aos olhos, para a essência, os nexos e relações internas das coisas" (ROSENTAL, 1960, p. 355). "O pensamento teórico e o conceito devem reunir as coisas dessemelhantes, diferentes, multifacetadas, não coincidentes e identificar seu peso específico nesse todo" (DAVÍDOV, 1988, p. 131). Nesse sentido, o conteúdo do conceito teórico é a relação objetiva entre universal e singular. Diferentemente do conceito empírico, no teórico "não está incluído algo que seja igual em cada objeto da classe, mas que revela as inter-relações de objetos isolados dentro do todo, dentro do sistema de sua formação" (DAVÍDOV, 1988, p. 131).

Em síntese, o sistema de numeração é revelado durante a medição das grandezas. A reprodução do processo de medição nos esquemas possibilita a captação da relação universal. O conceito não pode ser apresentado pronto aos estudantes, mas em formação, em um processo que conduza à diversidade das manifestações e à revelação das interconexões na relação do singular com o universal como algo concreto (DAVÝDOV, 1982).

No conceito teórico se reproduz o processo de desenvolvimento, de formação do sistema, do concreto, e se revela a inter-relação do objeto. Conforme Davídov (1988, p. 132), o pensamento teórico "sempre está internamente ligado com a realidade dada em forma sensorial". Assim, o sistema de numeração está interconectado com a prática objetal-sensorial da medição de grandezas, inicialmente, na forma de experimento cognitivo objetal-sensorial, e, posteriormente, mental.

Conforme mencionado, o processo de apropriação teórica do conhecimento envolve a reprodução de esquemas e modelos, produzidos historicamente pela humanidade, para a estruturação, idealização e transformação do objeto em estudo. Os símbolos são os meios de reprodução dos objetos no plano mental (DAVÝDOV, 1982). Como meio, é necessário que, na representação destes, estejam "precisas suas propriedades, regularidades, conceitos, teorias, relações, qualidades novas e desconhecidas em forma sensorial-evidente" (TORRECILLA, JIMÉNEZ, MENÉNDEZ, 2009, p. 4).

Inicialmente, a conexão interna do sistema de numeração é revelada no processo de medição a partir das características externamente observáveis nos objetos (as grandezas). Ao esquematizar esse procedimento por meio dos símbolos e signos, é possível elevá-lo ao plano metal.

> Os símbolos e os signos são os meios materiais de idealização e estruturação da materialidade científica, assim como também as formas mistas de ambos. Os símbolos são representações sensoriais de certo gênero de objetos [...]. A forma sensorial do símbolo é semelhante aos objetos que representa. [...]. A forma sensorial do próprio signo não tem semelhança física com o objeto que representa (DAVÝDOV, 1982, pp. 312-313).

De acordo com Santaella (1983, p. 14), “Sendo uma lei, em relação ao seu objeto o signo é um símbolo”, ou seja, o modelo. A modelação, na ciência, é um tipo específico de idealização simbólico-semiótico (DAVÍDOV, 1988), é utilizada como um método teórico (TORRECILLA, JIMÉNEZ, MENÉNDEZ, 2009). Modelação é “um sistema representado mentalmente ou realizado materialmente que, refletindo ou reproduzindo o objeto de investigação, é capaz de substituí-lo de modo que seu estudo nos dê uma nova informação sobre este objeto” (V. SHTOFF *apud* DAVÍDOV, 1988, p. 133). Esse procedimento exige um “complexo processo cognoscitivo, sistêmico, ordenado [...]” (TORRECILLA, JIMÉNEZ, MENÉNDEZ, 2009, p. 2).

Para Figueroa (2004, p. 14), “um modelo se constitui por meio de um processo de abstração do objeto real”, este deve:

> [...] ser suficientemente simples para que os resultados que se obtenham do mesmo, possam transferir-se ao objeto, meio ou sistema. – Deve ser suficientemente complexo para refletir o mais fielmente possível a realidade, no sentido que a maioria dos resultados do modelo, ao transferir-se, corresponda as propriedades e resultados do sistema (FIGUEROA, 2004, pp. 14-15).

Os modelos matemáticos refletem as propriedades estruturais dos respectivos conceitos. Qualquer modelo é necessariamente visual (SHTOFF, 1966 *apud* DAVÍDOV, 1988). Na matemática, os símbolos “em sua estrutura, reproduzem e copiam a formação da estrutura do objeto” (DAVÍDOV, 1988, p. 133). Nestes, a especificidade visual consiste na percepção interligada com a compreensão teórica de sua estrutura.

Por exemplo, o modelo do sistema de numeração consiste na relação de divisibilidade e multiplicidade: $\frac{B}{C}$ =... $n_{(C3)}$ $n_{(C2)}$ $n_{(C1)}$ (K) e B =... C [... $n_{(C3)}$ $n_{(C2)}$ $n_{(C1)}$ (K)].

É próprio da relação essencial do sistema de numeração que o todo *B* seja dividido pela unidade de medida *C*, mediado pela base numérica considerada. Portanto, essa estrutura, geneticamente inicial, dá origem a qualquer número, e trata-se do resultado aritmético do processo de medição. Consequentemente, o modelo mencionado reflete “as conexões e relações dos objetos reais” (DAVÍDOV, 1988, p. 134), por meio de suas grandezas.

A utilização dos modelos gráficos (arcos e segmentos), em substituição às relações entre as grandezas, possibilita a reprodução de novos elementos sobre o sistema de numeração como, por exemplo, a reta numérica nas diferentes bases que, posteriormente, na operacionalização, é transformada, em um novo modelo. Isso ocorre porque o estudo de um modelo, como sistema, “constitui um meio para a obtenção de informação sobre outro sistema [...]” (TORRECILLA, JIMÉNEZ, MENÉNDEZ, 2009, p. 5). Logo, os modelos não são apenas substitutos do objeto, eles “são uma forma de abstração científica de índole especial, em que as relações essenciais do objeto são destacadas e consolidadas em nexos e relações gráfico-perceptíveis, representáveis por elementos materiais ou sinalizadores” (DAVÝDOV, 1982, p. 315). O modelo “explica as relações contidas no processo de investigação e não apenas o resultado” (MAGAGNATO, 2011, p. 11). “É um meio especial para sinalizar os conceitos no pensamento científico-teórico” (DAVÝDOV, 1982, p. 323). A modelação está vinculada ao caráter visual. Esta também é utilizada pela didática tradicional, mas fixa somente as propriedades externas e observáveis dos objetos (DAVÍDOV, 1988). De outro modo, “no ensino experimental o caráter visual tem um conteúdo específico. Nos modelos visuais se refletem as relações e as conexões essenciais ou internas do objeto, isoladas (abstraídas) por meio das correspondentes transformações” (DAVÍDOV, 1988, p. 214).

A modelação da relação essencial do objeto de estudo é produto de uma complexa atividade cognoscitiva. Nesta, inicialmente ocorre a “elaboração mental do material sensorial inicial, sua ‘depuração’ de elementos casuais, etc. Os modelos são, os produtos e o meio de realização desta atividade” (DAVÍDOV, 1988, p. 135, grifos do autor). Nascimento (2014), a partir de Davýdov, afirma que

> Os modelos teóricos possuem um duplo papel: são instrumento de análise para o estudo do conteúdo das relações essenciais de um objeto (na medida em que nos permitem de forma "direta" a análise das relações internas de um fenômeno, testando as hipóteses sobre quais seriam essas relações e como se dá a conexão ou os nexos entre os seus elementos) e são, também, um modo de exposição sintética dos nexos internos encontrados pela análise (NASCIMENTO, 2014, p. 54).

Nas tarefas davydovianas, os modelos gráficos (arcos e malhas) e literais (letras) do sistema de numeração estão em unidade de análise e síntese. Permitem a análise e servem para explicar e substituir o experimento sensorial-objetal que constitui fonte e base do conhecimento humano. "Os sentidos põem o homem em contato com o mundo exterior. Todo o nosso conhecimento provém, em suma, das sensações e percepções; o homem não possui outras fontes, outros canais de contato com o mundo exterior" (KOPNIN, 1978, pp. 150-151). Nas palavras de Rosental, Lênin (*apud* ROSENTAL, 1960) afirma que o conhecimento do objeto, inicialmente, ocorre pelos aspectos externos e não com os internos. Porque "a essência das coisas permanece oculta no olhar imediato, requerendo-se grandes esforços para revelar esta essência" (ROSENTAL, 1960, p. 354).

Os elementos que compõem a estrutura da percepção "são as sensações que se reproduzem no curso a atividade prática com os objetos" (SERRA, 2002, p. 163). Sem as sensações e percepções não é possível reproduzir e elevar, ao plano mental, o objeto de estudo. Porém, essa sensibilidade é ativa, denominada por Davýdov (1982) de contemplação viva, que intervém apenas como elemento da atividade objetiva. "O mais elementar conhecimento sensível não deriva em caso algum de uma percepção passiva, mas da atividade perceptiva" (KOSIK, 1995, p. 33). O resultado da atividade receptiva (de receber os dados da atividade sensório-objetal pelos órgãos dos sentidos) incorpora-se em forma racional, torna-se mental nas representações empíricas e nos conceitos teóricos. Neste sentido, as representações das relações entre grandezas por meio de líquidos, superfícies, entre outras, e o sistema de numeração, como um conceito teórico, contribuem para a organização do trabalho dos órgãos dos sentidos (DAVÍDOV, 1988).

Conforme Lefebvre (1991, p. 106), "dificilmente a sensação entra no conhecimento propriamente dito, embora seja o seu necessário ponto de partida". E "o racional é o conhecimento da realidade sob as formas do pensamento que lança idéias [*sic*] cuja realização prática cria o mundo dos objetos correspondentes às necessidades do homem" (KOPNIN, 1978, p. 141).

Na cognição, a percepção e a experiência prática “nos dão seres [objetos] simples em aparência; ‘negamos’ essa simplicidade [...], destruímo-la, a fim de atingir e descobrir [revelar] a complexidade oculta, os elementos; e estamos então no domínio da análise, do entendimento” (LEFEBVRE, 1991, p. 105, grifos do autor). A sensibilidade do homem, como resultado do desenvolvimento da atividade prática-objetal, é contraditória por seu conteúdo (DAVÍDOV, 1988). Ela reflete a existência presente, mas, por meio da ação prática, impregna outro conteúdo na sensibilidade, o interno. Este consiste na mediatização e na continuidade da existência. Por ser sensorial e objetal, a ação prática reúne elementos opostos que se encontram em unidade imediata: o externo e o interno, o existente e o mediatizado, o singular e o universal (DAVÍDOV, 1988).

Na forma objetal, de caráter cognoscitivo, a sensibilidade humana (sensação e a percepção), sai dos limites da aparência e da existência imediata. A sensibilidade humana, em forma de ação objetal, pode reproduzir os momentos de mediatização, as conexões internas, a universalidade (DAVÍDOV, 1988).

> Esta possibilidade se estabelece e se amplia devido ao uso da simbologia material e depois dos signos verbais (o emprego destes últimos serve para passar das formas externas e objetais das ações cognoscitivas a suas formas análogas verbais discursivas, isto é, às ações propriamente mentais) (DAVÍDOV, 1988, p. 136).

O pensamento não pode “carecer do sensorial quer na sua origem, quer na forma de existência; ele sempre se baseia no sistema de sinais sensorialmente perceptível” (KOPNIN, 1978, p. 150). Neste sentido, as relações entre grandezas e as representações por meio de esquemas pressupõem formas complexas de atividade com base na contemplação viva, na qual a imaginação desempenha uma grande função. Pela capacidade psíquica da imaginação, é possível que estudantes recriem uma imagem, na qual estão representadas as modificações e ações dos objetos e sua interconexão. Desse modo, “no trato prático-utilitário com as coisas [...] o indivíduo ‘em situação’ cria suas próprias representações das coisas e elabora todo um sistema correlativo de noções que capta o aspecto fenomênico da realidade” (KOSIK, 1995, p. 14).

Para Davýdov (1982), a contemplação viva equivale ao pensamento humano reflexivo e racional, dialético. No processo histórico, “o pensamento surge e se desenvolve em base sensório-material” (KOPNIN, 1978, p. 150).

No contexto da atividade sensorial, de acordo Davýdov (1982), a principal finalidade do pensamento teórico é acessar a conexão universal. Como o objeto desse pensamento é a integridade, a unidade do diverso e o sistema, é necessário esclarecer suas causas e bases por meio de uma reprodução livre das casualidades e ziguezagues. Para tanto, o objeto é analisado em seu desenvolvimento. Essas condições permitem "separar mentalmente as formas de movimento que na realidade são indispensáveis […] e as meramente casuais, já que no processo de desenvolvimento, o sistema reproduz [...] o que para ele são premissas indispensáveis" (DAVÝDOV, 1982, p. 321)**.**

Para revelar a essência "é necessário reproduzir o *processo histórico* real de seu desenvolvimento, mas este é possível somente de conhecermos a essência [...]" (KOPNIN, 1978, p. 184, grifos do autor). Ou seja, o estudo do desenvolvimento do conceito ou sistema conceitual requer a expressão do resultado por meio do processo que conduz ao mesmo (já concluído) e explicação do processo por meio do resultado (ainda não concluído) que se espera (DAVÝDOV, 1982). Para isso, Kopnin (1978, pp. 184-185) ensina que o estudo do objeto deve iniciar "pelo fim, a partir de sua forma mais madura, do estádio [estágio] de desenvolvimento em que os aspectos essenciais estão suficientemente desenvolvidos e não estão disfarçados por casualidades que não têm relação direta com ela". Portanto, o início e o sucessivo caminho do movimento do conhecimento do objeto, são definidos pela unidade do lógico e do histórico (KOPNIN, 1978).

Por meio da sensibilidade, o homem percebe a existência da conexão universal do objeto, este é "um momento da atividade teórica muito transcendental" (DAVÝDOV, 1982, p. 322). Entretanto, a atividade sensorial não pode indicar a passagem do processo ao resultado e vice-versa. A reprodução da constituição do movimento intrínseco "está somente ao alcance do pensamento teórico ('as transições e mediações' são seus elementos) e seu conteúdo (tipo específico de conexões do singular no único) não pode ser reduzido a nenhuma sensibilidade" (DAVÝDOV, 1982, p. 322, grifos do autor). Isso ocorre porque as sensações e percepções expressam "os fenômenos e coisas singulares, porém a essência deles não pode ser revelada pela observação externa a introspecção deve elevar-se ao pensamento teórico, ao qual, baseando-se no conhecimento dos fenômenos, capta a essência das coisas" (SERRA, 2002, p. 33). O trabalho teórico se apoia em símbolos, como meios de expressão do conteúdo das coisas e não nas próprias coisas. A utilização dos símbolos requer a correlação do significado com os nexos do sistema de relações. Seu estudo ocorre por meio de um longo e complexo processo, não representável, em princípio, mediante as imagens sensoriais.

A sensibilidade é insuficiente porque não abarca o quantitativo do objeto. Deste modo, não é possível, na atividade sensorial, representar o que de modo direto não é observável. O conhecimento pela sensação é imediato, este “não é obtido através de um processo, de um caminho que passa através dos ‘meios’ de etapas ‘intermediárias’” (LEFEBVRE, 1991, p. 105, grifos do autor). O pensamento empírico, ao operar apenas com dados sensoriais, “supõem que todo o conteúdo há de reduzir-se a isso, e se ‘não se reduz’ é devido a causas externas [...] por limites quantitativos [objetos muito pequenos ou muito grandes]” (DAVÝDOV, 1982, p. 323).

O limite entre a experiência sensorial e o pensamento teórico do objeto passa “pela via de esclarecer as causas internas ou as condições de sua origem” (DAVÍDOV, 1988, p. 138). Essa experiência, incluindo a observação, apoia-se na ação cognoscitiva, que revela as conexões internas.

> As ações cognoscitivas sensório-objetais são a verdadeira base dos conceitos que possuem forma simbólico-semiótica. Os conceitos, apoiando-se nestas ações, revelam o conteúdo universal dos objetos, sistematizam e formam uma teoria, a qual corresponde ao conteúdo interno dos objetos (DAVÍDOV, 1988, p. 138).

Os vínculos “entre as ações objetais cognoscitivas e os conceitos representam a unidade do sensorial e do racional no conhecimento teórico da realidade” (DAVÍDOV, 1988, p. 138). Tal unidade significa que ambos participam no processo do conhecimento, um não sucede o outro (KOPNIN, 1978). A separação destes priva a operação com conceitos no plano mental.

> Deste modo, pois, o reconhecimento da especificidade do conteúdo objetivo do pensamento teórico não diminui o papel e a importância das fontes sensoriais do conhecimento. Ao mesmo tempo, só este reconhecimento determina o lugar e a forma de sua inclusão no pensamento teórico, só ele põe em evidência a sua necessidade como meio especial de reflexo da realidade, cuja finalidade é “captá-la” mais profundamente, e determinadamente, em conjunto (DAVÍDOV, 1988, pp. 138-139).

As fontes sensoriais são importantes no processo de formação do conceito, na sua existência e no desenvolvimento. A ciência desenvolve-se com base nos “dados empíricos, por isso a relação do momento racional com o sensorial não rompe depois de formado um conceito qualquer. Fora da noção e da contemplação não pode nem se formar nem existir qualquer conceito do mundo exterior” (KOPNIN, 1978, p. 157).

Para conhecer o sistema de numeração, assim como qualquer outro conceito, é necessário reproduzir “o caminho histórico do desenvolvimento do conhecimento, ou seja, desde a percepção sensível e a representação da abstração, que é o instrumento para conhecer a essência das coisas” (ROSENTAL, 1960, p. 355). A percepção,

> [...] a observação das coisas, constitui necessariamente a primeira fase de ato cognoscitivo de um sujeito individual, e só mais tarde podemos passar a uma fase mais alta, a fase da generalização e do pensamento abstrato, mediante ao qual conhecemos as leis que regem os fenômenos (ROSENTAL, 1960, p. 355).

Assim, o conteúdo objetivo do sistema de numeração, na proposição davydoviana, não diminui o papel e a importância das grandezas expressas nos objetos como suas fontes. Na verdade, o sistema de numeração é um meio especial de reflexo das relações entre grandezas. A reprodução teórica desse reflexo, como unidade das diversas bases realiza-se, na proposição davydoviana, pelo procedimento de ascensão do abstrato ao concreto. Por meio da atividade sensorial, de acordo com Davýdov (1982) o ser humano é capaz de captar as conexões do conhecimento, mas não estabelece o caráter interno dessas conexões em nível teórico. A tarefa do pensamento teórico “consiste em elaborar os dados da contemplação e da representação em forma de conceito e com ele reproduzir omnilateralmente o sistema de conexões internas que geram o concreto dado, revelar sua essência” (DAVÍDOV, 1988, p. 142). Para reproduzir teoricamente o concreto é necessária uma abstração substancial[20], esta consiste na “conexão historicamente simples[21], contraditória e essencial do concreto reproduzido” (DAVÍDOV, 1988, p. 143). A abstração substancial, segundo Ilienkov (2006, p. 165), possui qualidades, como “refletir a essência, a causa da coisa, e [...] ser uma abstração limite, [...] não alcançada de maneira mediata através de outras abstrações, mas que, pelo contrário, ela mesma serve para que se possa chegar a conhecer outra facetas e propriedades

---

[20] Para Davídov (1988, p. 143), “na designação da abstração inicial, o mais conveniente é utilizar os termos ‘célula’ ou ‘abstração substancial’, pois eles refletem a relação contemplativa, totalmente determinada, do sistema integral”.

[21] “Simples no sentido de que tais abstrações são um começo no desenvolvimento de um todo desenvolvido e delas inicia uma série de mediações, no sentido de que são fontes das quais surge e se desenvolve todo o resto” (ILIENKOV, 2006, p. 165).

dos fenômenos”. Kopnin (1978, p. 159) afirma que, “por meio da abstração, a ciência é capaz de apreender aquilo que é inacessível à contemplação viva”. A abstração constitui “um meio, um recurso para entrar em conhecimento dos fenômenos no que estes têm de concreto” (ILIENKOV, 2006, p. 161). As abstrações são meios de representar a realidade.

> A representação do histórico pelo lógico, a reprodução da essência do objeto, da história de sua formação e desenvolvimento se realizam nas diversas formas de movimento do pensamento. Em termos breves pode-se definir a forma de pensamento como modo de representação da realidade por meio de abstrações (KOPNIN, 1978, p. 187).

As propriedades da abstração substancial são satisfeitas somente pela conexão real, como fundamento genético do todo, o universal (DAVÝDOV, 1982). A abstração substancial expressa a essência do concreto porque

> a essência é a conexão interna que, como fonte única, como base genética, determina todas as outras especificidades particulares do todo. Trata-se de conexões objetivas, as que em sua dissociação e manifestação asseguram a unidade dos aspectos do todo, isto é, dão ao objeto um caráter concreto. Neste sentido, a essência é a determinação universal do objeto (DAVÍDOV, 1988, p. 147).

O procedimento para separação da abstração substancial consiste na separação “dentro das relações particulares [de cada base] e por meio da análise o que, simultaneamente, tem caráter de universalidade, que aparece como base genética do todo estudado” (DAVÍDOV, 1988, p. 147). A redução das diferenças existentes dentro do todo à sua essência é a tarefa da análise.

Portanto, para revelarmos, na presente investigação, a abstração substancial do sistema de numeração, foi necessário, por meio da análise das medições singulares propostas em cada tarefa, separar a relação entre grandezas que dá origem a cada base em particular, mas que também é válida para todas as bases, ou seja, a relação universal. Deste modo, a conexão que mediatiza o processo de desenvolvimento do sistema de numeração nas tarefas davydovianas surge da unidade entre uma medição singular e a relação universal.

O universal é o essencial, o que é próprio de inúmeros fenômenos e processos particulares e singulares. O universal sempre se expressa através do particular e do singular (ROSENTAL, 1960, p. 330). No sistema de numeração, consiste na formação das diferentes ordens para qualquer base numérica. A abstração da relação universal do sistema de numeração é reproduzida por meio dos esquemas, onde se estabelecem os resultados das ações realizadas com os objetos, na ação prática-objetal ou no plano mental. Nas representações objetais, a grandeza visível permite que se realizem as transformações reais, cujos resultados se pode não só pressupor, como também observar.

Pela análise, "primeiro se separa e depois se estuda especialmente a forma universal ou a essência do todo" (DAÝDOV, 1988, p. 147-148). Consequentemente, a separação da essência gera "o fundamento para a dedução genética por meio da recriação do sistema de conexões que reflete o desenvolvimento da essência, a formação do concreto" (DAVÍDOV, 1988. p. 148). Por meio da dedução é possível reproduzir "idealmente, mentalmente, os processos que nos são inacessíveis na prática imediata e acompanhamos o seu desenrolar" (KOPNIN, 1978, p. 214). Significa que não é necessário reproduzir, em todas as tarefas, o experimento objetal com as grandezas, mas apenas durante o processo de abstração. No movimento de dedução, o ponto de partida não é mais a relação objetal, mas a abstração substancial. Assim, uma nova base pode ser revelada a partir da abstração inicial, sem, necessariamente, estabelecer a relação objetal entre as grandezas. É possível, por exemplo, reproduzir na reta numérica, o sistema de numeração em qualquer base. Na proposição davydoviana, "a localização dos números formados a partir de diferentes bases na reta numérica, pressupõe a compreensão prévia da lógica interna do Sistema de Numeração. Trata-se do concreto pensado referente ao Sistema de Numeração" (ROSA, DAMAZIO e SILVEIRA, 2014).

Após encontrar, por meio da abstração, "certo aspecto ou certa propriedade da coisa para caracterizar o que constitui a base essencial e a unidade de todas as manifestações da coisa dada, começa o processo de ascensão que leva esse momento abstrato até ao concreto" (ILIENKOV, 2006, p. 162). No processo inicial, há um movimento de redução do real (concreto sensorial) ao abstrato (CARVALHO, 2008). E na fase seguinte, o movimento é de ascensão do abstrato ao concreto pensado (ILIENKOV, 2006).

O concreto, no pensamento,

> é o *conhecimento mais profundo e substancial* dos fenômenos da realidade, pois reflete com o seu conteúdo não as definibilidades exteriores do objeto em sua relação imediata, acessível à contemplação viva, mas diversos aspectos substanciais, conexões, relações em sua vinculação interna necessária. Abstrações isoladas elevam o nosso conhecimento da apreensão do geral empírico ao universal, enquanto o *concreto* no pensamento fundamenta a conexão do *singular* com o

> *universal*, fornece não uma simples unidade de aspectos diversos mas a identidade dos contrários (KOPNIN, 1978, p. 162, grifos do autor).

É importante ressaltar que o movimento entre abstrato e concreto não ocorre linearmente. A recriação do concreto está conectada "ao processo de síntese, ainda que dentro deste se produza permanentemente a análise a fim de se obter as abstrações indispensáveis" (DAVÍDOV, 1988, p. 148). O concreto é

> um processo de síntese, de inferência sintética; partindo da abstração inicial se desenvolve toda a multiplicidade concreta do fenômeno. Enquanto que o passar do sensorial concreto ao abstrato aplicamos, sobretudo, a análise, o procedimento de investigação mais importante para ascender do abstrato ao mentalmente concreto é a síntese. Como já temos dito, a síntese não é uma simples ligação mecânica de partes separadas até formar um todo, mas um procedimento de desenvolvimento; é a inferência do singular e concreto partindo do geral e abstrato. Unicamente esse desenvolvimento sintético que vai de uns conceitos e definições, a outros mais concretos, pode reproduzir – como resultado de todo o caminho de ascensão – a concreta diversidade das facetas do fenômeno em sua unidade (ILIENKOV, 2006, pp. 172 - 173).

Os processos de redução e ascensão se encontram em unidade. A ascensão expressa a natureza do pensamento teórico, por isso ela é o processo governante, e a redução é apenas um meio para alcançar o concreto (DAVÝDOV, 1982).

O pensamento teórico realiza-se, primeiramente, a partir da análise dos dados reais, na qual se separa a abstração substancial que estabelece e fixa a essência do objeto. Posteriormente, "segue a ascensão a partir da essência abstrata e da relação universal não desmembrada, até a unidade dos aspectos diversos em desenvolvimento, ao concreto" (DAVÍDOV, 1988, p. 150). A análise e a síntese, que são formas de pensamento, encontram-se em unidade.

A ascensão do abstrato ao concreto, conforme Pasqualini (2010, p. 38), expressa a "compreensão de como o universal se concretiza na singularidade pela mediação da particularidade". Oliveira (2001, p. 1) complementa que "a singularidade se constrói na universalidade e, ao mesmo tempo e do mesmo modo, como a universalidade se concretiza na singularidade, tendo a particularidade como mediação".

No processo de ascensão do pensamento ao concreto, a abstração e a generalização substanciais aparecem como dois aspectos únicos. Pela abstração separa-se a relação inicial de um determinado sistema integral e o movimento de ascensão "retém mentalmente a especificidade da relação real das coisas que determina o estabelecimento e a integridade dos diversos fenômenos" (DAVÝDOV, 1982, p. 353). Inicialmente, a relação essencial, expressa pela abstração, atua somente como relação particular no contexto de cada base numérica. Porém, no processo de generalização pode revelar-se o caráter geral dessa relação essencial, "como base da unidade interna do sistema integral" (DAVÍDOV, 1988, p. 151). O caráter geral da relação essencial do sistema de numeração consiste que esta é válida para qualquer situação, independente da grandeza ou da base numérica considerada, inclusive para bases maiores que a decimal.

A generalização substancial[22] do sistema de numeração requer a revelação da inter-relação entre as diversas bases numéricas e as distintas medições com a base universal do sistema de numeração: a lei de formação de sua unidade interna. Tal generalização é realizada por via da análise do sistema de numeração como um todo. Para Rosental (1962, p. 243), a generalização "entra no conhecimento da essência, da sujeição a leis no desenvolvimento das coisas, ou seja, uma essência que expressa o fundamental, o sujeito à lei em qualquer fenômeno singular". A finalidade consiste em revelar a "relação geneticamente inicial, essencial, universal, como base da unidade interna deste todo" (DAVÍDOV, 1988, p. 152). A relação revelada nesse processo possui forma objetal-sensorial.

A abstração e a generalização substanciais expressam-se no conceito teórico do sistema de numeração. Este se constitui em procedimento para a dedução, a partir da base universal, das diferentes bases numéricas particulares e das diversas situações singulares de medição de todas as grandezas. Na dedução, revelamos "como, porque e em que base dado singular está relacionado com esse universal, o que constitui o especial através do qual se estabeleceu a relação entre o singular e o universal" (KOPNIN, 1978, p. 193). Em outras palavras, no processo de dedução revela-se a relação do singular com o universal mediado pela particularidade. Neste sentido, "o conteúdo do conceito teórico são os processos de desenvolvimento dos sistemas integrais" (DAVÍDOV, 1988, p. 152).

O conceito teórico "é o resultado da generalização de uma enorme quantidade de fenômenos singulares, é o essencialmente comum, descoberto [revelado] pelo pensar nas

---

[22] Davídov (1988) denomina de *abstração substancial* a abstração inicial do processo de ascensão ao concreto e de generalização substancial, aquela que revela e acompanha a inter-relação do universal com o particular e singular. No caso do sistema de numeração seria aquela generalização que revela e acompanha a inter-relação do modelo universal válido para qualquer base, com cada base numérica em particular e o resultado singular de cada medição.

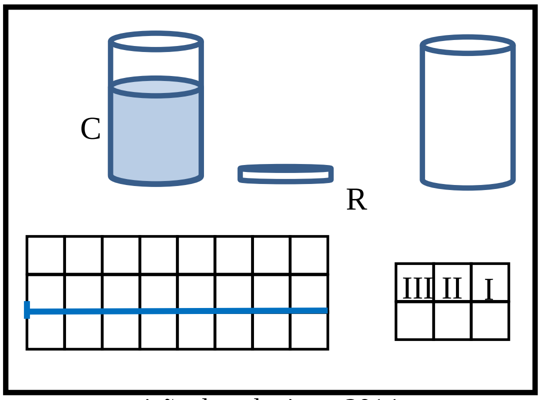
coisas e nos fenômenos particulares" (ROSENTAL, 1962, p. 237). Este conceito "*não reflete apenas o universal mas o universal em relação com o singular*" (KOPNIN, 1978, p. 205, grifos do autor). O conceito teórico, por meio de seu conteúdo, surge como "reflexo dos processos de desenvolvimento, da relação entre o universal e o singular, da essência e os fenômenos; por sua forma aparece como procedimento da dedução do singular a partir do universal, como procedimento de ascensão do abstrato ao concreto" (DAVÍDOV, 1988, p. 152).

Na especificidade do sistema de numeração, o conceito teórico constitui o procedimento e o meio da reprodução mental como sistema integral (interconexão entre universal, particular e singular). Portanto, ter o conceito do sistema de numeração significa dominar o seu procedimento geral de construção mental. Esse procedimento é derivado da ação objetal cognitiva, porque "implícito a cada conceito se oculta uma ação objetal cognitiva especial (ou um sistema de tais ações), sem que esta seja evidenciada, é impossível revelar os mecanismos psicológicos de surgimento e funcionamento do conceito dado" (DAVÍDOV, 1988, p. 153).

Em síntese, o conhecimento teórico sobre o sistema de numeração surge no processo de análise da função da relação entre as grandezas, mediada pela base numérica considerada. Da utilização de várias medidas, surge a necessidade de estabelecer a relação constante entre a grandeza a ser medida e a unidade de medida. Ou seja, estabelecer a base numérica, que é mediadora da relação entre as grandezas (o todo a ser medido e a unidade de medida). "Os resultados da medição são registrados na forma de um número posicional que, dependendo do valor da relação constante entre as medidas, pode pertencer a qualquer sistema de cálculo, inclusive o sistema decimal, se a relação for múltipla de dez" (DAVÍDOV, 1988, p. 210).

Para exemplificar a afirmação acima, apresentamos uma situação singular de medição do volume C, com a unidade de medida R, na base binária (Ilustração 136).

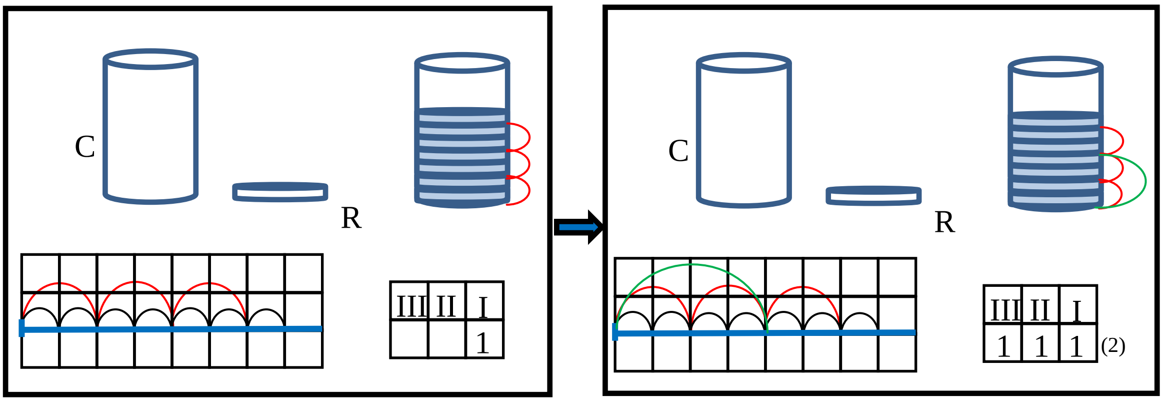
Ilustração 136 - Situação singular para medição




Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Na ilustração (136) consta o recipiente com volume C, que será objeto de medição, a unidade de medida *R*, a malha para representar a medição do líquido no esquema e o quadro valor de lugar para o registro do resultado. O processo consiste no seguinte (Ilustração 137):

Ilustração 137 - Processo de medição




$$\frac{C}{R} = 111_{(2)}$$

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A análise do processo de medição expresso na ilustração (137) revela a existência de uma regularidade: os agrupamentos são sempre compostos por duas unidades, neste caso porque a base em particular considerada foi a binária. A formação da segunda ordem ocorre a partir de duas unidades de primeira ordem, e a terceira ordem é composta por duas de segunda. O processo de medição por meio da ação objetal (medição com o volume) foi reproduzido no esquema (na malha com os arcos e segmentos), no quadro valor de lugar, e também expresso fora deste: $\frac{C}{R} = 111_{(2)}$. Esta relação serve de base genética inicial de todas as manifestações do sistema de numeração. A partir dessa análise, também ocorre a revelação da relação geneticamente inicial; neste caso, a formação das diferentes ordens para qualquer base numérica como base universal do sistema integral.

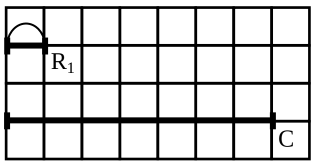
No processo de cognição, o conhecimento teórico, referente ao sistema de numeração na proposição davydoviana, sai dos limites das representações com as grandezas. Isso porque, surge a partir da transformação mental das bases e reflete as relações e conexões internas entre as mesmas. Conforme constata-se na ilustração (137), na qual o processo de medição do volume de líquido é reproduzido no esquema composto por arcos e segmentos da malha quadriculada. Esse esquema reflete as relações e conexões internas da base binária, saindo, assim, dos limites das representações objetais com o líquido. Se esse procedimento ocorresse diretamente do processo de medição objetal ao registro aritmético, sem a reprodução no esquema, sem esse elemento mediador, resultaria no conhecimento empírico. A passagem pelo esquema possibilita a revelação das relações e conexões internas da base numérica no esquema representativo da reta numérica, contexto matemático do conceito de número.

Também é importante ressaltar que nos conhecimentos teóricos fixa-se o elo da relação entre o universal e singular. Tal elo consiste em que o singular (resultado da mediação) é sempre derivado de uma relação entre grandezas (universal) mediada por uma base numérica em particular. Portanto, a concretização do sistema de numeração consiste na dedução e explicação das diferentes bases numéricas no processo de medição para qualquer grandeza, a partir de seu fundamento universal. A relação interna revelada para a base binária em particular possibilita a dedução e explicação das diversas manifestações do sistema de numeração.

É importante lembrar que o modelo universal da conexão interna do número, para qualquer base, consiste na relação de divisibilidade e multiplicidade: $\frac{B}{C} =\ldots\ n_{(C3)}\ n_{(C2)}\ n_{(C1)}\ (K)$ e $B = C\ [\ldots\ n_{(C3)}\ n_{(C2)}\ n_{(C1)}\ (K)]$. Do geral (relação entre as grandezas B e C), mediado por uma particularidade (uma base numérica), resulta o número (singular). A composição do número, ou seja, a composição das diferentes ordens, depende da base que foi considerada: $n_{(c2)}$ (uma unidade de segunda ordem) é tantas vezes o valor da base a unidade de primeira ordem (c1), e $n_{(c3)}$ (uma unidade de terceira ordem) é tantas vezes o valor da base a unidade de segunda ordem (c2), e assim, sucessivamente.

Os elementos que compõem o modelo do sistema de numeração são extraídos durante a ação prática-objetal com as grandezas. A reprodução da medição dos elementos que compõem o modelo, no esquema, faz parte do processo de modelação e possibilita novas medições. Por exemplo, a medição da mesma quantidade anterior (Ilustração 137), mas da grandeza comprimento em outra base numérica, a quaternária, conforme a ilustração 138:

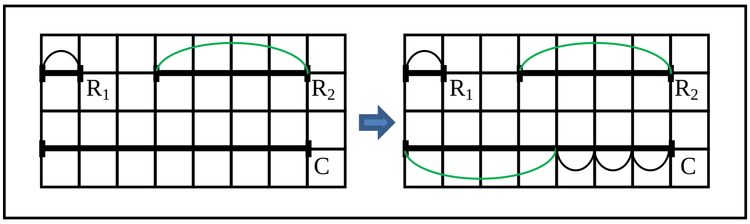
Ilustração 138 - Grandeza comprimento para ser medida na base numérica quaternária




Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A regularidade da formação das ordens consiste que uma ordem superior é tantas vezes a quantidade da base a ordem inferior. Deste modo, na base quatro, uma unidade de medida de segunda ordem ($1R_2$) é constituída por quatro vezes a de primeira ordem ($4R_1$); neste caso, quatro unidades de comprimento da malha (Ilustração 139). A partir dessa regularidade é possível, primeiramente, formar a segunda ordem ($R_2$) e, depois, realizar a medição do comprimento C:

Ilustração 139 - Processo de medição

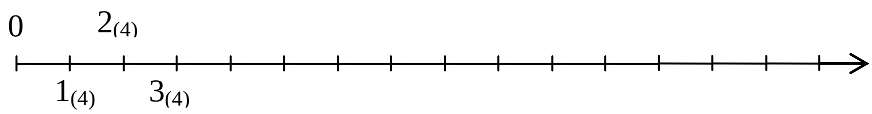



$$\frac{C}{R} = 13_{(4)}$$

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Da relação $\frac{C}{R}$, mediada pela base quaternária (Ilustração 139), resultou *uma* unidade de segunda ordem e *três* de primeira, $13_{(4)}$. Conforme Davídov (1988), a partir do modelo se pode realizar novas manipulações, novas medições. Além disso, uma importante contribuição da proposição davydoviana para o ensino do sistema de numeração é a interconexão do processo de medição com a reta numérica[23] que, no caso da medição anterior, seria assim representada (Ilustração 140):

Ilustração 140 – Reta numérica na base quaternária



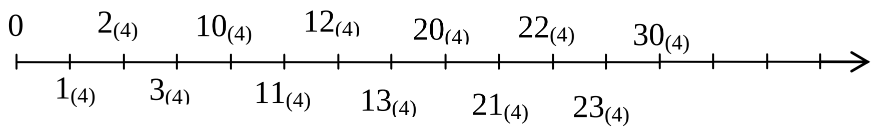

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Qual o próximo número a ser registrado na reta (Ilustração 140)? É o *um* e *zero*, $10_{(4)}$, porque quatro unidades de primeira ordem formam uma unidade de segunda. O número seguinte será $11_{(4)}$, porque a formação da sequência numérica consiste sempre no acréscimo de uma unidade, conforme segue (Ilustração 141):

---

[23] O registro dos números em outras bases na reta numérica, também, foi apresentado na ilustração 11, do segundo capítulo da presente dissertação.

Ilustração 141 - Registro dos números quaternários na reta numérica




Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

O registro na reta, em qualquer base numérica, só é possível na proposição davydoviana porque é revelada a conexão interna do sistema de numeração, válida para todas as bases.

Uma das possibilidades da passagem de uma base à outra, para além dos limites do experimento objetal, a partir do modelo, seria a divisão do resultado da medição na base decimal pelo valor da base numérica. O resultado da medição (Ilustração 139) $13_{(4)}$, na base dez, consiste em uma unidade composta por *quatro* e mais *três*, ou seja, são *sete* unidades na base decimal: a partir da relação $\frac{C}{R} = 7$ (*sete* unidades na base *dez*) é possível transitar, sem a ação objetal, por qualquer base. No caso da ternária, por exemplo, a formação da segunda ordem ocorreria a partir do agrupamento de três unidades de primeira, a terceira ordem seria composta por três unidades de segunda, e assim sucessivamente. Tal relação ocorre porque a lógica de formação dos agrupamentos, no interior das diferentes, bases é a mesma.

Assim, $7 \div 3 = 2$ e sobra uma unidade. Isto significa que são *dois* agrupamentos compostos por *três* unidades cada (*duas* unidades de segunda ordem) e sobrou *uma* que não formou grupo (*uma* unidade de primeira ordem). Caso a quantidade da segunda ordem fosse igual ou maior que o valor da base considerada, seria necessária a formação de uma terceira ordem; em outras palavras, a divisão da segunda ordem (quociente) pelo valor da base novamente. Desse procedimento, a relação entre as grandezas (C e R), mediada pela base ternária, resulta em: $\frac{C}{R} = 21_{(3)}$.

Outra possibilidade é “converter um número *A* escrito em um sistema qualquer (base *p*) a outro (base *q*)” (FORMIN, 1995, p. 11). Por exemplo, converter o número 13 escrito na base quatro para a base ternária. “Para isso devemos realizar uma série de divisões consecutivas usando *q* como divisor e (*A*), como dividendo inicial. Essas divisões, entretanto, deverão ser feitas no sistema em que o número *A* está inicialmente representado, ou seja, no sistema de base *p*” (FORMIN, 1995, p. 11). Por exemplo: $13_{(4)} \div 3_{(4)} = 21_{(3)}$.

A reflexão anterior sobre o trânsito de uma base para outra durante o desenvolvimento das tarefas apresentadas no segundo capítulo foi realizada no plano mental, com a ajuda de modelos e esquemas. Como enfatizado previamente, o conhecimento teórico do sistema de numeração inicialmente se expressa no modelo objetal (como registro do processo de medição dos volumes, das áreas...), e, posteriormente, no modelo gráfico (reta numérica, esquemas compostos por segmentos e arcos). Esse movimento possibilitou atingir a modelação literal: $\frac{A}{B} = \ldots n_{(3)}n_{(2)}n_{(1)}(K)$.

A dedução e explicação apresentadas nos parágrafos anteriores referem-se à nossa síntese, nosso ponto de chegada, após percorrermos o movimento conceitual proposto por Davýdov e colaboradores durante o desenvolvimento das tarefas sobre o sistema de numeração. Porém, no ensino atual brasileiro, em alguns cursos de nível superior que contemplam o ensino das diferentes bases, esse é o ponto de partida. Em outras palavras, o ponto de partida dessas propostas é o ponto de chegada de nossas reflexões a partir do estudo da proposta davydoviana. Trata-se apenas do ensino do algoritmo sem o experimento objetal, sem as relações entre grandezas contínuas e discretas e sua elevação ao plano mental por meio dos esquemas. Por conseguinte, entendemos que a proposição davydoviana para o ensino do sistema de numeração poderia ser considerada para repensar não apenas os anos iniciais do Ensino Fundamental, mas também o Ensino Superior.

E quanto à operacionalização do sistema de numeração? Para responder esta questão faz-se necessário retomar as reflexões sobre abstrato, concreto, universal, particular e singular.

> O seguimento das passagens do particular ao universal e do universal ao particular e ao singular, o seguimento do processo de surgimento de uns ou outros objetos, é acessível somente ao experimento mental, que transforma o objeto idealizado e nesta transformação revela suas novas relações internas (DAVÍDOV, 1988, p.153).

Como mencionado reiteradas vezes, o universal do sistema de numeração consiste na relação que dá origem ao número em qualquer base numérica. A base numérica é o elemento mediador, a particularidade. Conforme a base numérica considerada em uma situação singular de medição, resulta uma nova singularidade, o resultado aritmético. O acesso a esse movimento interno é possível pelo experimento mental, assim como o acesso ao processo de surgimento das operações de adição e subtração do sistema de numeração. O experimento mental possibilita a transformação do sistema de numeração idealizado e, nessa transformação, revela suas novas relações internas. Nesse experimento se realizam as transformações dos objetos, que não são, necessariamente, realizadas por meio das ações objetais. Vale lembrar que a ação objetal (relação entre grandezas), por meio das sensações e percepções, é apenas ponto de partida da formação dos conceitos. Além disso, "muitos conceitos novos se formam também à base dos conceitos anteriores" (KOPNIN, 1978, p. 209). Isso porque, na ascensão do abstrato ao concreto

> se põem de manifesto a natureza da negação dialética; em virtude dessa natureza, o novo – no presente caso os conceitos refletem novas facetas, propriedades e relações do objeto investigado – não prescinde dos conceitos anteriores mais abstratos, mas o assimila, os converte em sua base ou em uma das facetas da mesma. Neste processo, cada nova etapa, cada novo conceito e cada nova definição, tornam-se cada vez mais concretos, condessa em si os resultados da investigação precedente. Ao mesmo tempo, quanto mais nos afastamos da abstração inicial, tanto mais mediatos resultam nossos conceitos (ILIENKOV, 2006, p. 175).

Reafirmamos, também, que a proposição davydoviana contempla o desenvolvimento de sistemas conceituais inter-relacionados em de sua fragmentação. Deste modo, os elementos que estruturam as operações de adição e a subtração são revelados, pelos estudantes, desde o primeiro ano do Ensino Fundamental (ROSA, 2012; ALVES, 2013; ROSA, DAMAZIO e ALVES, 2013). O desenvolvimento dessas operações, desde o primeiro ano escolar, contemplava a ação objetal, o modelo universal da relação parte-todo, a operacionalização na reta numérica, mas nos limites do sistema de numeração decimal, sem chegar ao algoritmo. O foco era para as ideias da adição e da subtração com quantidades razoavelmente pequenas, tendo como ponto de partida o experimento objetal referente às grandezas discretas e contínuas (ROSA, 2012; ALVES, 2013; ROSA, DAMAZIO e ALVES, 2013).

O objeto de estudo da presente dissertação é o algoritmo das operações de adição e a subtração, apresentado na proposição davydoviana, a partir das diferentes bases numéricas. Assim, tanto o experimento objetal referente às ideias de adição e subtração (relação parte-todo) quanto ao sistema de numeração nas diferentes bases foi realizado antes de chegar no algoritmo. Em outras palavras, as tarefas referentes à operacionalização do sistema de numeração não mais contemplam a ação objetal. Porém, ocorre o contínuo desenvolvimento dessa relação, e esse desenvolvimento “compreende a transformação em nova qualidade” (KOPNIN, 1978, p. 209). Em razão disso, a formação de um novo conceito ocorre a partir “da separação da relação fundamento e o estudo de suas propriedades à identificação das possíveis consequências [...]” (DAVÍDOV, 1988, p. 211).

A relação fundamental das operações da adição e subtração consiste no contínuo desenvolvimento da relação essencial do sistema de numeração. A relação parte-todo (adição e subtração) e a formação das diferentes ordens constituem a essência do algoritmo das operações em referência. Conforme anunciado, inicialmente, as operações são desenvolvidas na reta, esta é

> o lugar geométrico dos infinitos números reais [...] Ela possibilita a introdução da inter-relação entre as operações de adição e subtração na forma de acréscimo e decréscimo de unidades. Por meio de deslocamentos para a direita realiza-se a operação de adição e para a esquerda a subtração (ROSA, 2012, p. 229).

Os esquemas e o registro dos números na reta são, também, o concreto ponto de chegada das tarefas referentes ao sistema de numeração. Deste modo, os esquemas das ordens e a reta consistem no ponto de chegada do estudo do sistema de numeração, e ponto de partida para as operações de adição e subtração. No caminho de ascensão “se produzem as metamorfoses dos conceitos, ou seja, os conceitos abstratos se tornam concretos e os concretos se transformam em abstratos” (ILIENKOV, 2006, p. 175). O conceito de adição e subtração formado no curso da reprodução do sistema de numeração é concreto em relação ao anterior. Conforme “o pensamento vai avançando formula conceitos ainda mais concretos, o anterior se converte em conceito abstrato em relação ao novo, mais concreto” (ILIENKOV, 2006, p. 175). “Se o concreto é a unidade de múltiplos fenômenos, é natural que, ao conhecer a multiplicidade das propriedades das coisas, os próprios conceitos relacionados a eles se tornarão mais concretos” (ROSENTAL, 1962, p. 326). Além disso, as ideias de adição e subtração fazem parte da constituição do próprio sistema de numeração. A adição

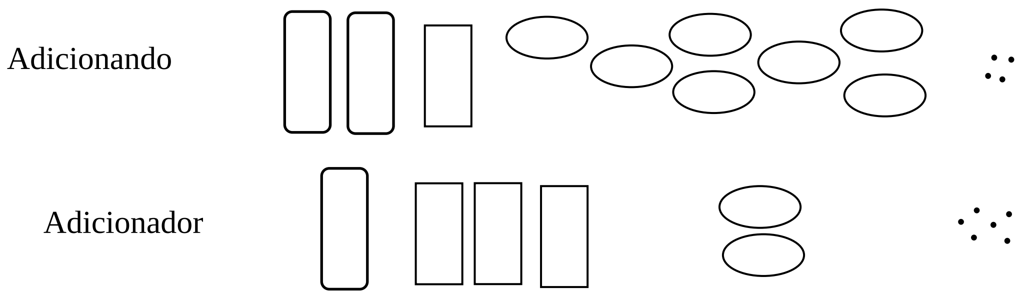
> é a operação mais simples e da qual todas as outras dependem. A ideia *adicionar* ou *somar* está já incluída na própria noção de número [...] o que é a operação elementar de passagem de um número ao seguinte, senão a operação de somar uma unidade a um número? Pois bem, somar a um número *a*, dado, outro número *b*, é efetuar a partir de *a*, *b* passagens sucessivas pela operação elementar (CARAÇA, 1951, p.17).

O descolamento de uma unidade na reta, para a direita, resulta na adição, e o deslocamento para esquerda, a subtração. Bézout (1849, p. 18), afirma que “diminuir, é uma operação, pela qual se tira um número de outro número”. Por meio da reta é possível, também, estabelecer relações entre os números como o maior e o menor, “o argumento para um número ser maior que o outro é que ele esteja mais distante do início da reta numérica” (ROSA, 2012, p. 173). Tais procedimentos resultam na assimilação das propriedades e regularidades do sistema de numeração, do valor absoluto e o relativo dos algarismos entre outros. “O algarismo 2, por exemplo, tem sempre o valor absoluto dois, mas no número 269 ele possui um valor relativo, isto é, em relação às unidades ele vale duzentos” (DUARTE, 1987, p. 37).

Todo esse processo constitui a base para a realização de operações mais complexas, como determinar o resultado da união de suas coleções sem reuni-las no plano objetal, ou o inverso, a partir do resultado, determinar uma das coleções (DUARTE, 1987). O algoritmo das operações da adição e subtração é inserido no decorrer das tarefas a partir da impossibilidade das operações serem realizadas na reta, por serem números extensos ou impraticáveis por meio da composição e decomposição numérica (por necessitar de reagrupamentos).

Para tanto, propõe-se, por exemplo, um problema cuja resolução requer a adição de duas parcelas[24] (adicionando e adicionador). Cada parcela é apresentada por meio de um esquema que representa as ordens para qualquer base (Ilustração 142).

Ilustração 142 - Parcelas no esquema das ordens




Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

---

[24] No contexto da operação de adição, a palavra “parcela” é sinônimo da palavra “parte” (ГОРБОВ, МИКУЛИНА е САВЕЛЬЕВА, 2009).

Para determinar o todo é necessário somar as partes (adicionando e adicionador). O valor de cada parte é expresso graficamente[25]. A base a ser considerada, a título de exemplificação, será a decimal. Para a resolução do algoritmo, registra-se a quantidade referente a cada parcela no quadro valor de lugar (Ilustração 143).

Ilustração 143 - Resolução adição por meio do algoritmo

| | Mil | Cen | Dez | Un |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 1 | 7 | 4 |
| + | 1 | 3 | 2 | 6 |
| | | | | |

⇨

| | | | 1 | |
|---|---|---|---|---|
| | Mil | Cen | Dez | Un |
| | 2 | 1 | 7 | 4 |
| + | 1 | 3 | 2 | 6 |
| | | | | 0 |

⇨

| | | 1 | 1 | |
|---|---|---|---|---|
| | Mil | Cen | Dez | Un |
| | 2 | 1 | 7 | 4 |
| + | 1 | 3 | 2 | 6 |
| | 3 | 5 | 0 | 0 |

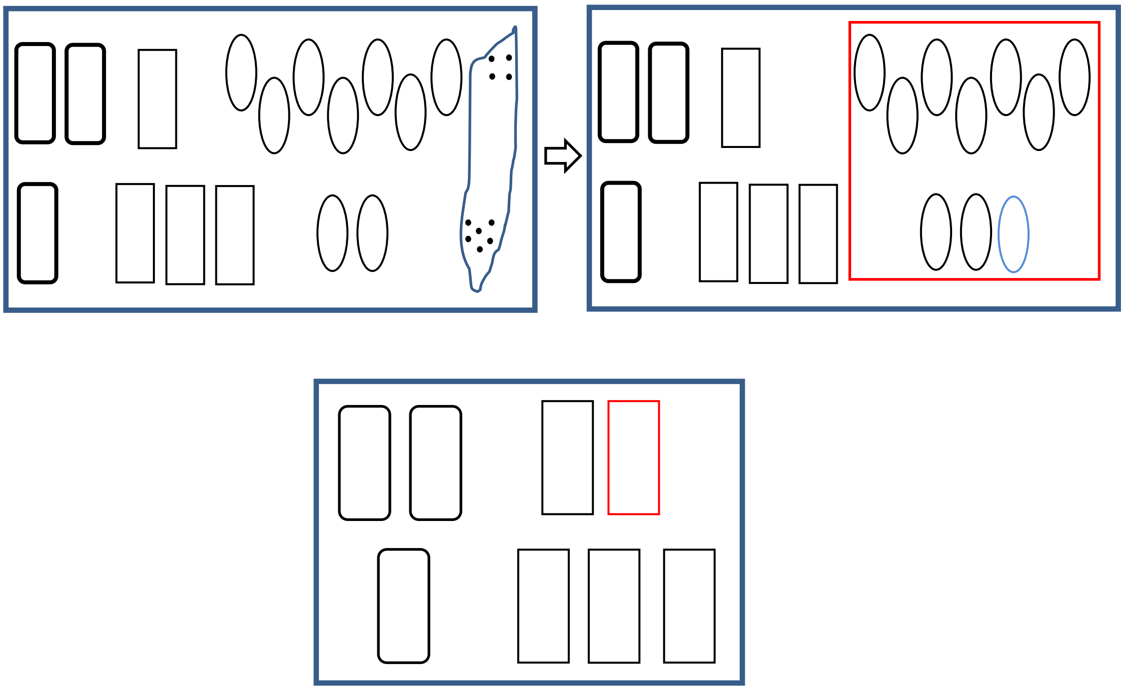
Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Nos quadros (Ilustração 143), após o registro do valor das parcelas, foi determinado o valor do todo. A adição das unidades resultou na formação de um grupo de segunda ordem (dez unidades). Este movimento já é realizado no plano metal, pois se pressupõe a superação do plano objetal, afinal, trata-se da essência da constituição do sistema de numeração, a formação de uma nova ordem. A indicação desse procedimento foi registrada na operação com uma seta e o número *um*. Posteriormente, a adição das unidades de segunda ordem, também resultou a formação de uma unidade de terceira ordem (dez unidades de segunda ordem), conforme a indicação da seta e do número *um* na operação. A soma de duas parcelas, igual ou superior ao valor da base, resulta na formação de uma nova unidade de ordem superior.

O resultado obtido foi a soma de três mil e quinhentos (3500). O movimento de agrupamento das ordens pode ser explicitado graficamente (Ilustração 144):

[25] Cada ponto representa uma unidade de primeira ordem; cada elipse, uma de segunda ordem; o retângulo representa a terceira; e o retângulo com *cantos arredondados*, a quarta ordem. Tal representação é conhecida pelos estudantes desde a introdução do sistema de numeração (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 144 - Adição por meio da representação das ordens



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A representação gráfica (Ilustração 144) possibilita a explicitação das transformações internas do sistema de numeração e, consequentemente, da operação de adição. Percebe-se sua diferença da orientação brasileira, que contempla as transformações externas ao sugerir o agrupamento de dez palitos presos por um elástico, nos limites da base decimal (BRASIL, 2014b). Por outro lado, o esquema das ordens é válido para qualquer base numérica. Na especificidade do exemplo em análise (Ilustração 144), o agrupamento das dez unidades resultou em uma nova unidade de segunda ordem (elipse), e dez dezenas em uma nova unidade de terceira (retângulo). Assim, a adição das parcelas por meio dos esquemas resultou em três unidades de quarta ordem e cinco de terceira: 3500.

A operação da subtração, por sua vez, é a inversa da adição (CARAÇA, 1951).

> dada a soma e uma das parcelas, determinar a outra. Deveria haver duas operações inversas, conforme se pedisse o *adicionando* ou o *adicionador*, mas, em virtude da *propriedade comutativa* da adição, os papeis das duas parcelas podem trocar-se, e as duas inversas fundem-se numa só, que se chama *subtração* (CARAÇA, 1951, p. 20 - grifo do autor).

A relação entre essas operações "é tão importante que se pode dizer que só se compreende totalmente uma delas quando se compreende sua relação com a outra" (DUARTE, 1987, p. 41). A proposição davydoviana contempla tal inter-relação. Supomos que uma das partes seja desconhecida, é possível determinar seu valor a partir da subtração da parte conhecida, mil, trezentos e sessenta e cinco (1365) em relação ao todo, três mil e quinhentos (3500). Portanto, para determinar a diferença entre dois números (uma parte), subtrai-se a parte conhecida do todo (Ilustração 145).

Ilustração 145 - Operação de subtração

| | Mil | Cen | Dez | Un |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | 5 | 0 | 0 |
| - | 1 | 3 | 6 | 5 |
| | | | | |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

Após registro do minuendo[26] e do subtraendo, calcula-se a diferença (Ilustração 145). Porém, como subtrair cinco unidades de nenhuma? Como se sabe, os algarismos em um número podem ter valor reagrupado (GROSSNICKLE, BRUECKNER, 1959). Neste caso, três milhares e cinco centenas podem ser reagrupadas em três milhares quatro centenas, nove dezenas e dez unidades, e possibilitar a operação (Ilustração 146).

[26] Os termos *diminuendo* e *subtraendo* são utilizados no contexto da operação de subtração de números. Estes são sinônimos dos termos *inteiro* e *parte* (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Ilustração 146 - Reagrupamento das ordens

4 10

| | Mil | Cen | Dez | Un |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | ~~5~~ | 0 | 0 |
| - | 1 | 3 | 6 | 5 |
| | | | | |

⇨

9

4 ~~10~~ 10

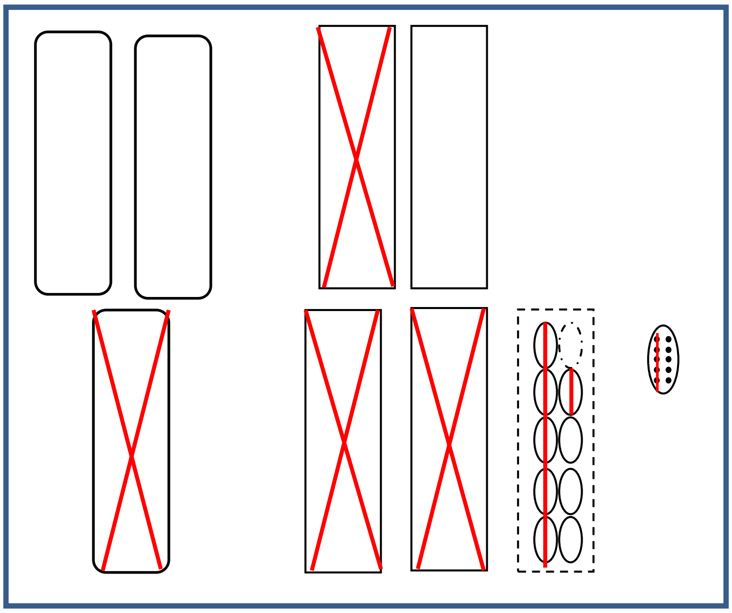
| | Mil | Cen | Dez | Un |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | ~~5~~ | 0 | 0 |
| - | 1 | 3 | 6 | 5 |
| | 2 | 1 | 3 | 5 |

Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

O reagrupamento de uma unidade de terceira ordem em dez de segunda (base decimal) possibilitou reagrupar uma de segunda em dez de primeira (Ilustração 146). Assim, o valor da parte desconhecida é dois mil, cento e trinta e cinco (2135).

Por meio do esquema das ordens, também é possível representar o movimento interno da operação de subtração anteriormente realizada (Ilustração 147).

Ilustração 147 - Subtração no esquema das ordens



Fonte: Elaboração nossa com base na proposição davydoviana, 2014.

A subtração representada no esquema abstrato (Ilustração 147) reflete o movimento interno de suas relações essenciais. Na adição, quando a soma das ordens das parcelas era igual ou maior que o valor da base numérica considerada, havia a formação de uma nova ordem, superior; ou seja, a adição com reagrupamento das ordens. Na subtração, quando uma determinada ordem do minuendo for menor que a ordem correspondente do subtraendo, é necessário reagrupar ou transformar uma unidade da ordem superior em tantas unidades quantas são as da base numérica considerada. Em síntese, a essência das operações de adição e subtração consiste no agrupamento e reagrupamento das ordens, conforme o valor da base.

A partir do movimento da operacionalização no algoritmo e nos esquemas das ordens, é possível explicitarmos a relação essencial das operações de adição e subtração. Esta é composta pela relação parte-todo, mediada pela base numérica, conforme segue (Ilustração 148):

Ilustração 148 – modelo literal

$$
\begin{array}{r}
A_{(K)} \\
+\ B_{(K)} \\
\hline
DC_{(K)}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
DC_{(K)} \\
-\ B_{(K)} \\
\hline
A_{(K)}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
DC_{(K)} \\
-\ A_{(K)} \\
\hline
B_{(K)}
\end{array}
$$

Fonte: Elaboração nossa a partir da análise da proposição davydoviana, 2014.

No modelo da operação da adição, a união das parcelas (partes A e B) resulta na soma (todo, DC). Essa relação é mediada pela base numérica (particular). A utilização das diferentes bases numéricas resulta nas várias expressões da soma (singular).

No modelo literal da operação de subtração (Ilustração 148), o resto/diferença (uma das partes, A ou B) procede da diminuição do subtraendo (outra parte, A ou B) no minuendo (todo DC); esse movimento também é mediado pela base numérica (particularidade).

Os modelos literais revelados (Ilustração 148) expressam o agrupamento e o reagrupamento da segunda ordem (D) para qualquer base numérica. Porém, eles também são válidos para o agrupamento e o reagrupamento das diferentes ordens, conforme a composição dos números a serem operados.

Apresentamos as principais sínteses ao longo do percurso investigativo, mas é importante enfatizar que a essência da operacionalização é o contínuo desenvolvimento da essência do sistema de numeração. Como afirma Kopnin (1978, p. 186),

> A teoria do objeto fornece a chave do estudo de sua história, ao passo que o estudo da história enriquece a teoria, corrigindo-a, completando-a e desenvolvendo-a. É como se o pensamento se desenvolvesse conforme um círculo: da teoria (ou lógica) à história e desta novamente à teoria (lógica).

Portanto, a lógica do sistema de numeração, que consiste na formação de suas ordens, fornece a chave para o estudo das operações de adição e subtração. E o estudo da essência das operações, ou seja, os agrupamentos e reagrupamentos das ordens, determinados pelo valor da base numérica, enriquece a lógica do sistema de numeração, porque compreende o seu desenvolvimento. Esse movimento explicita a unidade entre o lógico e o histórico da operacionalização do sistema de numeração. Tal unidade se expressa na conexão existente entre o universal (relação parte-todo que expressa o agrupamento ou reagrupamento das ordens), o particular (conforme a base numérica ocorre o agrupamento ou reagrupamento das ordens) e o singular (resultado da operação).

# 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante o desenvolvimento do presente trabalho expomos algumas sínteses, agora, apresentaremos as últimas considerações a respeito do nosso percurso investigativo e a reflexão sobre as implicações deste para a organização do ensino do sistema de numeração e das operações de adição e subtração.

Analisamos a conexão dialética existente entre o universal, o particular e o singular no movimento conceitual expresso na proposta de ensino de Davýdov e colaboradores para a operacionalização do sistema de numeração, na unidade entre o lógico e o histórico.

Desenvolvemos o processo de investigação por meio de três etapas. Inicialmente, a apropriação de cada tarefa para a operacionalização do sistema de numeração; depois, a análise de suas diferentes formas de desenvolvimento; e, finalmente, a revelação da interconexão das mesmas. Orientamo-nos, no processo de realização dessas etapas, pelas categorias do lógico, histórico, universal, particular e singular concernentes ao método de investigação e exposição adotado, o materialismo dialético. Para tanto, selecionamos, extraímos, organizamos e explicamos as tarefas davydovianas referentes à operacionalização da adição e subtração do sistema de numeração, assim como a elaboração da síntese do sistema de numeração apresentada por Davýdov e colaboradores. Além disso, realizamos o estudo dos fundamentos da lógica formal, presentes em algumas orientações e proposições brasileiras. Tais fundamentos são superados, por incorporação, pela lógica dialética, referência da proposição davydoviana. Esta prevê a revelação da relação essencial dos conceitos em estudo, válida para todas as particularidades, inclusive àquelas consideradas pela lógica formal.

Adotamos o procedimento de exposição do sistema de numeração e sua operacionalização, orientado do abstrato ao concreto, do sensorial ao racional, por meio das etapas objetal, gráfica, literal e numeral na interconexão das diferentes bases numéricas. Assim, revelamos a relação essencial do sistema de numeração: formação de suas ordens, gênese das operações de adição e subtração. Os agrupamentos e reagrupamentos das ordens, determinadas pelo valor da base numérica, constitui a essência das operações de adição e subtração. A unidade entre o lógico e o histórico da operacionalização do sistema de numeração se expressa na conexão existente entre a relação parte-todo, na qual ocorre o agrupamento ou reagrupamento das ordens, a base numérica adotada e o resultado da operação.

Deste modo, foi confirmada a hipótese de que o movimento conceitual, adotado na proposição de ensino davydoviana para a operacionalização do sistema de numeração, contempla a unidade entre o lógico e o histórico, expressa na conexão do universal com o particular e o singular.

Mas, qual a relevância dessa investigação para a organização do ensino referente à operacionalização do sistema de numeração? Qual a importância de contemplar a unidade entre o lógico e o histórico na conexão entre o universal, particular e singular nesse processo?

As reflexões sobre o movimento conceitual proposto por Davýdov e colaboradores para a adoção direta no ensino provavelmente tenham pouca repercussão nos dias atuais no contexto educacional. Isto porque tais reflexões não são apreendidas imediatamente, mas são possibilidades de superação.

Essas discussões, tomadas isoladamente, sobre o sistema de numeração, ou mesmo no âmbito de toda a disciplina de Matemática, pouco contribuirá para o desenvolvimento do pensamento teórico. Contudo, a importância dessa reflexão reside na possibilidade de expressar elementos para pensarmos e construirmos um método de organização de ensino para todos os conceitos e todas as disciplinas.

Revelar a essência de qualquer conceito, a partir da unidade entre o lógico e o histórico, significa estudá-lo no processo de mudança, de desenvolvimento, refletidas na lógica por meio do procedimento de ascensão do abstrato ao concreto. Conforme Davídov (1988), a estrutura da atividade de estudo desenvolvida pelos estudantes na escolarização inicial[27] corresponde a esse procedimento. Neste processo, os estudantes "expõem os resultados de suas investigações por meio das abstrações, generalizações, e conceitos teóricos substanciais, que exercem um papel no processo de ascensão do abstrato ao concreto" (DAVÍDOV, 1988, p. 173). Ao realizar a atividade de estudo, os estudantes se apropriam do

---

[27] "O termo 'atividade de estudo', que designa um dos tipos de atividade reprodutiva das crianças, não deve identificar-se com o termo 'aprendizagem'. Como se sabe, as crianças aprendem nas formas mais diversas de atividade (no jogo, no trabalho, no esporte, etc.). A atividade de estudo tem um conteúdo e uma estrutura especiais e devemos diferencia-la de outros tipos de atividade que as crianças realizam tanto na idade escolar inicial como em outras (por exemplo, deve ser diferenciada da atividade lúdica, da atividade social-organizativa, de trabalho, etc.). Ainda, na idade escolar inicial, as crianças realizam os tipos enumerados e outras atividades, mas a principal é a de estudo: ela determina o surgimento das principais formações psicológicas da idade dada, define o desenvolvimento psíquico geral das crianças de menor idade, a formação de sua personalidade em conjunto" (DAVÍDOV, 1988, p. 159, grifos do autor).

conceito. Para tanto, executam ações mentais semelhantes às quais esses conceitos foram construídos historicamente, e reproduzem no pensamento. A atividade de estudo "consiste em uma das vias de realização da unidade do histórico e do lógico no desenvolvimento da cultura humana" (DAVÍDOV, 1988, pp. 174-175).

Ao iniciar o estudo de um conceito matemático com auxílio do professor, os estudantes estudam as relações entre várias grandezas e identificam a relação essencial correspondente ao conceito em estudo e a modelam. Nesse processo, constatam que a relação anteriormente identificada se manifesta em outras situações, particulares e singulares. Durante a resolução das tarefas, os estudantes "completam uma espécie de microciclo de ascensão do abstrato ao concreto como meio de assimilação dos conhecimentos teóricos" (DAVÍDOV, 1988, p. 179). Além disso, os estudantes generalizam substancialmente o conceito, ou seja, detectam a vinculação regular da relação entre as grandezas com suas diversas manifestações. Assim, os estudantes (com orientação do professor) utilizam a abstração e a generalização substancial para deduzir e unir outras abstrações; com isso, "convertem a formação mental inicial num conceito que registra o 'núcleo' do assunto estudado" (DAVÍDOV, 1988, p. 175). Esse núcleo é a essência do que permite aos estudantes orientarem-se nas diversas manifestações.

No percurso de assimilação do conhecimento, o pensamento dos alunos move-se de forma orientada, do geral para o particular, e explicita a origem do conteúdo do conceito. Portanto, na atividade de estudo se reproduz, de modo abreviado, na consciência dos estudantes, o procedimento de origem. Durante o cumprimento sistemático da atividade de estudo, nos alunos se desenvolve, junto com a assimilação dos conhecimentos teóricos, a consciência e o pensamento teóricos (DAVÍDOV, 1988, p. 176).

Na especificidade da operacionalização do sistema de numeração em Davýdov, os estudantes realizam o processo de medição com grandezas e identificam a relação essencial, a formação das diferentes ordens: cada ordem será **n** vezes a anterior e **n** é o valor da base numérica considerada. Nesse processo revelam que tal relação se manifesta nas demais tarefas, por meio de outras grandezas e diferentes bases numéricas. Além disso, a reproduzem nas formas objetal (grandezas), gráfica (esquema) e literal: $\frac{B}{C} = \ldots n_{(C3)}\, n_{(C2)}\, n_{(C1)}\, (K)$ e $B = \ldots C\, [\ldots n_{(C3)}\, n_{(C2)}\, n_{(C1)}\, (K)]$, esse é o modelo do conceito de número para qualquer base. Assim, do processo de medição resulta um número composto por uma ou várias ordens. É importante ressaltar que o desenvolvimento desse procedimento percorre as etapas objetal, gráfica, literal e numeral, o que possibilita a interconexão entre as significações aritméticas, algébricas e geométricas do conceito de número. Esse movimento possibilita generalização substancial do sistema de numeração, e a dedução de outras abstrações desse sistema, como a essência das operações de adição e subtração, que consiste nos agrupamentos e reagrupamentos das ordens, determinados pelo valor da base numérica. Nesse movimento revela-se a lógica que reflete o desenvolvimento histórico do sistema de numeração, assim como o seu contínuo desenvolvimento.

A sugestão do Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa - PNAIC (BRASIL, 2014b) é diferente. Conforme o documento, para o ensino do sistema de numeração decimal, a orientação consiste em utilizar os dedos e o próprio corpo humano para o processo de construção de número pela criança. As mãos são consideradas como ferramentas de registro das quantidades. São valorizados os aspectos e procedimento adotados pela humanidade no estágio inicial do desenvolvimento da matemática, tais como a utilização do comprimento do palmo como unidade de medida, histórias dos primitivos na relação com a matemática. Também se sugere a dotação de recursos lúdicos e jogos. Cada estudante deve ter uma "Caixa Matemática" (BRASIL, 2014, p. 19) com palitos, tampinhas, cédulas, entre outros. Para o início do sistema de numeração, propõem-se "jogo do tapetinho" [28] em detrimento do quadro valor de lugar. Esse jogo é considerado importante porque as unidades, dezenas e centenas são representadas com os agrupamentos de palitos, diferentemente do quadro valor de lugar, que é com os algarismos. Tal sugestão ocorre porque o princípio posicional do sistema de numeração é considerado "difícil para a criança em processo de alfabetização" (BRASIL, 2014b, p. 80).

As operações de adição e subtração também são desenvolvidas com materiais manipuláveis como, por exemplo, o material dourado, o ábaco, entre outros (BRASIL, 2014c). Considera-se a utilização de jogos e algoritmos no contexto da resolução de problemas.

Constatamos que a proposição do PNAIC, para a assimilação dos conceitos pelos estudantes, ocorre a partir da separação das características comuns, por meio da comparação dos diversos materiais manipuláveis ou visuais utilizados para a contagem. Por exemplo,

---

[28] "base para apoio dos materiais, de forma a organizá-los segundo o sistema de posicionamento" (BRASIL, 2014b, p. 19).

agrupamentos compostos por dez dedos das mãos, de dez palitos, dez tampinhas... têm em comum a quantidade, uma dezena. Esse procedimento de abstração corresponde, de acordo com Davýdov (1982), ao ensino tradicional fundamentado na lógica formal. Nesta, o conceito “se desenvolve de baixo para cima, das propriedades mais elementares e inferiores à superiores, ao passo que os conceitos científicos de desenvolvem de cima para baixo, das propriedades mais complexas e superiores para as mais elementares e inferiores” (VIGOTSKI, 2000, p. 248).

A orientação brasileira em referência não segue o procedimento de ascensão do abstrato ao concreto, porque não reduz do sensorial a relação essencial, válida para qualquer base numérica. A relação do processo de contagem ao registro aritmético do resultado é direta; ou seja, na passagem do sensorial ao racional não há mediação de esquemas que possibilitam o movimento das relações internas do sistema de numeração. As etapas previstas contemplam apenas o aspecto objetal (nos limites da contagem de grandeza discreta) e numeral. A ênfase é para as significações aritméticas em detrimento das algébricas e geométricas. O estudo do sistema de numeração ocorre por meio da análise das características comuns, externas e a partir de uma única base numérica, a decimal. Assim, não se revela a relação interna válida para qualquer base que compõe o sistema de numeração, inclusive a decimal.

As características comuns, externas, são explicitadas sem a conexão com outros conceitos. Assim, esse movimento não contempla a unidade do lógico e do histórico, porque não revela a lógica que reflete o desenvolvimento histórico do sistema de numeração. Consequentemente, a relação essencial para as operações de adição e subtração não é apresentada como o contínuo desenvolvimento da relação essencial do sistema.

A proposição davydoviana também contempla a ideia de que uma dezena é composta por dez unidades. Mas vai além, quando nos ensina que unidade de segunda ordem é composta pela quantidade indicada pela base numérica considerada. Esse exemplo, assim como as reflexões apresentadas no decorrer da presente dissertação, nos possibilitam argumentar que a proposição davydoviana supera, por incorporação, a proposição brasileira. Portanto, a sugestão não seria abandonar os conteúdos e métodos desenvolvidos historicamente no Brasil, mas superá-los.

Enfim, as reflexões e sínteses apresentadas ao longo desta investigação resultaram de um processo investigativo que se iniciou há quatro anos no curso de Especialização.

Chegamos ao final do processo com a necessidade de refletir sobre o desenvolvimento da proposição davydoviana para o ensino do sistema de numeração e as operações de adição e subtração em situação escolar, no contexto brasileiro. Também, vislumbramos a possibilidade de repensar, a partir da relação essencial revelada no presente estudo, os conteúdos e métodos de ensino referentes às diversas operacionalizações do sistema de numeração (multiplicação, divisão, potenciação, radiciação e logaritmização), assim como a expressão dos números negativos, racionais e irracionais nas diferentes bases. Estas são algumas possibilidades de temáticas para as futuras pesquisas.

## REFERÊNCIAS

ALEKSANDROV, A. D. Visión general de la Matemática. In: **La matemática: su contenido, métodos y significado.** 1 ed. 2ª reimpresión. Madrid: Alianza Universidad, 1976. p. 17-91.

ALVES, E. de S. B. **Proposições Brasileiras e davydovianas: limites e possibilidades.** 2013. 119 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma.

ARAUJO, E. S. **Contribuições da Teoria histórico-cultural à pesquisa em educação matemática**. In: 35ª Reunião Anual da ANPEd, 2012, Porto de Galinhas. Educação, cultura, pesquisa e projetos de desenvolvimento: o Brasil do século XXI, 2012. p. 1-18.

ARAÚJO, L. B. C. **A Questão do Método em Marx e Lukács:** o desafio da reprodução ideal de um processo real. In: Menezes, Ana M.; Figueiredo, Fábio F.. (Org.). Trabalho, Sociabilidade e Educação. Uma crítica à ordem do Capital. ed. Fortaleza- Ce: UFC, 2003, v. 1, p. 13-396.

ASSUMPÇÃO, M. C. M. A. **O método em MARX: Relação com a categoria *práxis***. In: V Encontro brasileiro de educação e marxismo, 2011, Florianópolis. Marxismo, educação e emancipação humana, abr. 2011.

BARBOSA, M. D.; OLIVEIRA, A. M. L. As quatro operações fundamentais da matemática aprendida na escola e sua aplicação no dia a dia e a ludicidade. In: 9ª Semana de Licenciatura, 2012, Jataí. **Anais da Semana de Licenciatura.** Jataí, 2012. v. 3.

BAPTISTA, M. G. A. Práxis e educação em Vigostiki. **Revista eletrônica arma da crítica**, ano 2: número especial, dez. 2010. p. 120-142.

BELONSI, M. H.; DUARTE, A. P. F. A.; BORBA, L. O.; QUEIROZ, Q. H. A utilização do jogo de dominó na facilitação da apropriação das técnicas e conceitos utilizados nas operações de adição e subtração. In: Semana de Integração Acadêmica, 1, 2013, Goiás. **Anais...** Goiás: UEG, 2013. p. 37-42.

BERGAMO, G. B.; BERNARDES, M. R. Produção de Conhecimento. **Educ. Soc.**, Campinas, vol. 27, n. 94, pp. 179-198, jan./abr. 2006**.** Disponível em: http://www.cedes.unicamp.br.

BERTINI, L. F. **Compartilhando conhecimentos no ensino de matemática nas séries iniciais: uma professora no contexto de tarefas investigativas.** 2009. 135 f. Dissertação (mestrado em Educação) - Universidade Federal de São Carlos.

BÉZOUT, Etienne M. **Elementos de arithmetica.** Coimbra: Livraria Portuguesa, 1849. Disponível em:

http://almamater.uc.pt/wrapper.asp?t=Elementos+de+aritm%E9tica&d=http%3A%2F%2Fbdigital%2Esib%2Euc%2Ept%2Fbduc%2FBiblioteca%5FDigital%5FUCBG%2Fdigicult%2FUCBG%2D4A%2D16%2D12%2D10%2FglobalItems%2Ehtml
Acesso em: 10 nov. 2014.

BOYER, C. B. **História da matemática;** tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. **Plano Nacional de Pós-Graduação**. Brasília, 2 v, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. **Plano Nacional pela Alfabetização na Idade Certa.** Disponível em: http://pacto.mec.gov.br/component/content/article?id=53:entendento-o-pacto. Acesso 21 nov. 2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: **Apresentação**/ Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. – Brasília: MEC, SEB, 72 f, 2014a. Disponível em: http://pacto.mec.gov.br/images/pdf/cadernosmat/PNAIC_MAT_Apresentaao_pg001-072.pdf. Acesso em: 26 de nov. 2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: **Construção do Sistema de Numeração Decimal** / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. – Brasília: MEC, SEB, 88 f, 2014b. Disponível em: http://pacto.mec.gov.br/images/pdf/cadernosmat/PNAIC_MAT_Caderno%203_pg001-088.pdf. Acesso em: 20 de nov. 2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: **Operações na resolução de problemas** / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. – Brasília: MEC, SEB, 88 f, 2014c. Disponível em: http://pacto.mec.gov.br/images/pdf/cadernosmat/PNAIC_MAT_Caderno%204_pg001-088.pdf . Acesso em: 20 de nov. 2014.

BRUNELLI, J. B. **Projeto ou atividade de ensino e de aprendizagem? Expressões da implantação da Proposta Curricular do Estado de Santa Catarina.** 2012. 128 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1951.

CARVALHO, E. **A produção dialética do conhecimento**. São Paulo: Xamã, 2008.

CHAGAS, E. F. **O método dialético de marx:** investigação e exposição crítica do objeto. Sintese (Belo Horizonte. 1974), v. 38, p. 55-70, 2011.

COSTA, J. M. C. Da. **Tratado de arithmetica**. Lisboa: Imprensa Nacional, 1866.

CUNHA, A. L. A. **Ensino de estatística: uma proposta fundamentada na teoria do ensino desenvolvimental**. 2014, 128 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia.

CURI, E.; SANTOS, C. A. B. ; RABELO, M. H. M. . Aprendizagens e dificuldades de alunos de 5º ano com relação ao sistema de numeração decimal. **Educação Matemática em Revista**, RS, v. 13, p. 57-69, 2012.

CRESTANI, S. **Análise conceitual das proposições de Davydov e seus colaboradores para o ensino do conceito de divisão.** 2013. 70 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma.

DAMAZIO, A.; ROSA, J. E.; EUZEBIO, J. S. O ensino do conceito de número em diferentes perspectivas. **Educação Matemática Pesquisa (Impresso)**, v. 14, p. 01-23, 2012.

DAVÝDOV, V.V. **Tipos de generalización en la enseñanza.** 3ª. ed. Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982.

DAVÍDOV, V. V. Análisis de los principios didácticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza en el futuro próximo. In: **La psicologia evolutiva y pedagógica em la URSS**. Moscú, Progresso. 1987, p. 143-155.

DAVÍDOV, V. V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico:** investigación teórica y experimental. Trad. Marta Shuare Moscú: Editorial Progreso, 1988.

DORIGON, J. C. G. **Proposições de Davydov para introdução ao conceito de equação.** 2013. 90 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma.

DUARTE, N. **A relação entre o lógico e o histórico no ensino da matemática elementar.** 1987. 185 f. Dissertação (Mestrado em educação) - Universidade Federal de São Carlos, São Paulo.

EUZÉBIO, J. S. **Ensino do conceito de número: Proposta de ensino Davýdov e as proposições tradicionais.** 2011. 64 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Pedagogia) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma.

EVES, H. **Introdução à historia da matemática.** Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues. – Campinas, São Paulo: Unicamp, 2004.

FIGUEROA, L. G. G. La modelación matemática en el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial. 2004, 81 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências com especialidade em Matemática) - Universidad autónoma de nuevo león, Università.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**. Campinas, Unicamp, Ano 3 - n°4, p. 1-37, 1995.

FIORENTINI, D. LORENZATO, S. **Investigação em educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas, SP, Autores Associados, 2006.

FORMIN, S. **Sistemas de numeração**. Tradução Gelson Iezzi. São Paulo: Atual, 1995. (Matemática: Aprendendo e Ensinando).

FRERES, H.; RABELO, J. J.; SEGUNDO, M. D. M. **O papel da educação na sociedade capitalista: uma análise onto-histórica.** In: V Congresso brasileiro de história da educação: o ensino e a pesquisa em história da educação. Aracaju- Sergipe: Universidade Tiradentes, 2008. v. 1.

GROSSNICKLE, F. E; BRUECKNER, L.J. **O ensino da aritmética pela compreensão**; trad. Olga. Barroca *et al*. Fundo de Cultura. Rio de Janeiro: 1965.

GUNDLACH, B. H. **História dos números e numerais: tópicos de história da matemática para uso em sala de aula;** trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

HOBOLD, E. S. F. **Proposições para o ensino da tabuada com base nas lógicas formal e dialética**. 2014. 199 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do sul de Santa Catarina, Tubarão.

IFRAH, G. **História universal dos algarismos. Volume 1: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo;** tradução de Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997- 2v.

ILIENKOV, E. V. La ascensión de lo abstracto a lo concreto en principios de la lógica dialéctica. In: Alfredo Tecla Jiménez, **Teoría de la construcción del objeto de estudio**. México: Instituto Politécnico Nacional, p. 151-200, 2006.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDIS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA – INEP. **PISA.** [s.d.]. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/pisa-programa-internacional-de-avaliacao-de-alunos.>. Acesso em: 12 de maio 2014.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDIS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA – INEP. **IDEB.** [s.d.]. Disponível em: < http://portal.inep.gov.br/web/portal-ideb/o-que-e-o-ideb>. Acesso em: 18 de maio 2014.

JIMÉNEZ, A. T. La categoría de totalidad y los hechos sociales. In: Alfredo Tecla Jiménez,**Teoría de la construcción del objeto de estudio**. México: Instituto Politécnico Nacional, p. 84-102, 2006.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

KOSIK, K. **Dialética do concreto.** Trad. Célia Neves e Alderico Toríbio. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1995.

LEFEBEVRE, H. **Lógica Formal e Lógica Dialética**. Tradução de Carlos Nelson Coutinho. 5ª edição. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1991.

LEMOS, L. Vieira. **A atividade do professor e a matemática no ensino fundamental: uma análise sócio histórica de sua estrutura e conteúdo**. 2014. 154 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma.

LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, R. A. M. M. Vasily Vasilyevich Davydov: A escola e a formação do pensamento teórico- científico. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (orgs.). **O Ensino desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos**. Uberlândia: EDUFU, 2013. p. 315-350.

LIMA, T. C. S.; MIOTO, R. C. T. Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica. Rev. **Katál**. Florianópolis, v. 10, p. 37-45, 2007.

MADEIRA, S. C. **"Prática": Uma leitura Histórico-Crítica e proposições davydovianas para o conceito de multiplicação**. 2012. 165 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma.

MAGAGNATO, P. C. **Fundamentos teóricos da atividade de estudo como modelo didático para o ensino das disciplinas científicas.** 2011. 93 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência) - Universidade Estadual Paulista, Bauru.

MARTINS, L. M. As aparências enganam: divergências entre o Materialismo Histórico-Dialético e as Abordagens Qualitativas de pesquisa. In: I Encontro Brasileiro de Educação e Marxismo, 2005, Bauru. **Anais do I EBEM**. Bauru: Unesp, 2005. v. 1, p. 28.

MARX, K. **O Capital - crítica da economia política**. Trad. Regis Barbosa e Flávio R. Kothe - 3ª ed. - São Paulo: Nova Cultural, 1988 (Coleção Os economistas).

MARX, K. **Grundrisse: manuscritos econômicos de 1857-1858: esboços da crítica da economia política**; tradução: Mario Duayer, Nélio Schneider – São Paulo: Boitempo; Rio de Janeiro: Ed. UFRJ, 2011.

MATOS, C. F. **Resolução de problemas davydovianos sobre adição e subtração por estudantes brasileiros do sexto ano do ensino fundamental.** 2013. 168 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma.

MÉSZÁROS, I. **A educação para além do capital**. 2ª ed. - São Paulo: Boitempo, 2008.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica. **Revista Brasileira de Educação**. Jan /Fev /Mar /Abr 2005, N. 28, p. 50-62.

MORETTI, M. T. **Dos sistemas de Numeração às Operações Básicas Com Números Naturais.** Florianópolis: Ed. da UFSC, 1999.

MORETTI, V. D. **Professores de matemática em atividade de ensino: uma perspectiva histórico-cultural para a formação docente.** 2007, 207 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo.

MOURA, M. O. de. *et al*. Atividade orientadora de ensino: unidade entre ensino e aprendizagem. **Rev. Diálogo Educ.**, Curitiba, v. 10, n. 29, p. 205-229, jan./abr. 2010.

NASCIMENTO, C. P. **A atividade pedagógica da Educação Física: a proposição dos objetos de ensino e o desenvolvimento das atividades da cultura corporal**. 2014, 293 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo.

NETTO, J. P. Introdução ao método na teoria social. In: **Serviço Social: direitos sociais e competências profissionais**. Brasília: CFESS/ABEPSS, 2009, p. 667-700.

NUNES NETO, R.; MENDOZA, H. J.G.; DELGADO, O. T. Estudo sobre avaliação diagnóstica da atividade de situações problema em sistema de equações lineares no curso de sistema de informação da faculdade atual da Amazônia. **Poiésis**, Tubarão, volume Especial, p. 157-172, jan./jul. 2014.

NOGUEIRA, C. M. I.; SIGNORINI, M. C . Crianças, algoritmos e o sistema de numeração decimal. **Investigações em Ensino de Ciências** (UFRGS. Impresso), v. 15, p. 446, 2010.

NÚÑEZ, I. B.; OLIVEIRA, M. V. F. P. YA. Galperin: A vida e a obra do criador da teoria da formação por etapas das ações mentais e dos conceitos. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (orgs.). **O Ensino desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos**. Uberlândia: EDUFU, 2013. p. 284-313.

OLIVEIRA, B. **O método materialista histórico dialético.** In: V Encontro de Psicologia Social Comunitária, 16 a 18/08/2001, Unesp-Bauru.

PANOSSIAN, M. L. **O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos com princípio para constituição do objeto de ensino da álgebra**. 2014, 317 f. Tese (Doutor em Educação) - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo.

PASQUALINI. J. C. **Princípios para a organização do ensino na educação infantil na perspectiva Histórico-Cultural: um estudo a partir da análise da prática do professor**. 2010, 268 f. Tese (Doutorado em Educação Escolar) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Araraquara.

PEREIRA, E. F. **O Jogo no Ensino e Aprendizagem de Matemática.** In: II Semana de Educação Matemática da UESB, 2010, Vitória da Conquista. Anais SEMAT, 2010.

PEREIRA FILHO, A. D. **Análise de Erros Produzidos por Estudantes de um Curso de Engenharia Civil na Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I**. 2012, 118 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Luterana do Brasil, Canoas.

PRESTES, Z.; TUNES, T.; NASCIMENTO, R. Lev Semionovitch Vigotski: Um estudo da vida e da obra do criador da psicologia histórico-cultural. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (orgs.). **O Ensino desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos**. Uberlândia: EDUFU, 2013. p. 47-65.

ROSA, J. E. **Proposições de Davydovy para o ensino de Matemática no primeiro ano escolar: inter-relações dos sistemas de sistema de significações numéricas**. 2012, 244 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A.; ALVES, E. S. B. Adição e subtração em Davydov. **Boletim GEPEM / Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática**, Rio de Janeiro, n. 63, p. 61-75, Jul./Dez. 2013.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A.; CRESTANI, S. Os conceitos de divisão e multiplicação nas proposições de ensino elaboradas por davydov e seus colaboradores. **Educação Matemática Pesquisa (Online)**, São Paulo, v. 16, p. 167-187, 2014.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A.; SILVEIRA, G. M. O Sistema de Numeração nas Tarefas Propostas por Davydov e seus Colaboradores para o Ensino de Matemática. **Boletim de Educação Matemática – BOLEMA**, São Paulo, v. 28, n. 50, p. 1135-1154, dez. 2014.

ROSENTAL, M. M. O histórico e o lógico**.** In: ROSENTAL, M. M.; STRAKS, G. M**. Categorías del Materialismo Dialéctico.** Tradução de Adolfo Sanchez Vazquez e Wenceslao Roces. México: Grijalbo. 1960. p. 324-357.

ROSENTAL, M. M. Principios de lógica dialectica. Tradução: Augusto Vidal Roget. Ediciones Pueblos Unidos. Montevideo, Uruguai, 1962.

SANTAELLA, L. **O que é semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 1983.

SERRA, D. J. G. **La psicología del reflejo creador**. Havana, 2002.

SILVA, L. A. Ensino-aprendizagem da matemática através da resolução de problemas no ensino fundamental II. **Rios Eletrônica - Revista Científica da FASETE**, Bahia, ano 6, n. 6, p. 49-55, dez. 2012.

SILVA, I. M.; NICOLLI, A . A. Uma abordagem crítica no ensino de matemática: possibilidades de articulação teoria-e-prática por meio da educação matemática crítica. **AMAZÔNIA - Revista de Educação em Ciências e Matemáticas** V.7, n. 14 - jan 2011/dez. 2011.

SILVEIRA, G. M. **Proposições para o ensino do sistema de numeração em Davýdov.** 2012. 111 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma.

SILVEIRA, G. M. ; ROSA, J. E. ; DAMAZIO, A. As Diferentes Bases Numéricas Nas Proposições de Davýdov e seus Colaboradores para o Ensino de Matemática. In: Congresso Internacional de Ensino da Matemática, VI, 2013, Canoas. **Anais...** Canoas: ULBRA, 2013.

SILVEIRA, G. M. Introdução do valor posicional do algarismo zero na proposição de Davýdov e colaboradores para o ensino do sistema numérico posicional**.** In: Anped Sul, X, 2014, Florianópolis. **Anais...** Florianópolis: UDESC, 2014.

SOUSA, V. G. de. **Realidade e possibilidades da prática docente em matemática**

**nos anos iniciais: um estudo mediado pelas proposições davydovianas**. 2014. 221 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Piauí, Teresina.

SOUZA, M. B. **O ensino do conceito de número: objetivações nas proposições davydovianas e formalista moderna**. 2013. 237 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma.

STERNIN, A. O. O singular, o particular e o universal. In: ROSENTAL, M. M.; STRAKS, G. M**. Categorías del Materialismo Dialéctico.** Tradução de Adolfo Sanchez Vazquez e Wenceslao Roces. México: Grijalbo, 1965. p. 257-297.

SUCHODOLSKI, B. **Teoria marxista de educação.** Editorial Estampa, Lisboa, 1976, II volume.

TORRECILLA, B., JIMÉNEZ, L., MENÉNDEZ, H. La modelación y los modelos teóricos en la ciencia. Una concreción en la auditoria interna con enfoque de riesgo. **Contribuciones a la Economía**, Cuba, julho, 2009. Disponível em: http://www.eumed.net/ce/2009b/tjm.htm. Acesso em 23 out. 2014.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação.** São Paulo: Atlas, 1987.

VIGOTSKI, L. S. **A Formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

VYGOTSKI, L. S. **Obras Escogidas II: Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores.** Espanha: Visor, 1996.

VOGADO, G. E. R.; JUCÁ, R. S.; MOTA, T. B. Limite e derivada: uma análise da produção escrita dos alunos. **Revista WEB-MAT**, Belém, vol. 1, n. 1, p. 61-75, Janeiro-Julho 2014.

ZATTI, F., AGRANIONIH, N. T., ENRICONE, J. R. B. Aprendizagem matemática: desvendando dificuldades de cálculo dos alunos. **PERSPECTIVA**, Erechim. v. 34, n.128, p. 115-132, dezembro/2010.

ГОРБОВ, С. Ф. МИКУЛИНА Г. Г.; САВЕЛЬЕВА О. В. . **Обучение математике. 2 класс: Пособие для учителей начальной школы** (Система Д.Б.Эльконина – В.В. Давыдова). 2-е ида. перераб. - М.: ВИТА-ПРЕССб, 2009. **[Ensino de Matemática. 2 ano: livro do professor do ensino fundamental** (sistema do D.B.Elkonin – V.V. Davidov)/ S.F.Gorbov, G.G.Mikulina, O.V.Savieliev – 3ª edição, - Moscou, VITA-PRESS, 2009.

ДАВЫДОВ. В. В., ГОРБОВ С. МИКУЛИНА.Ф,Г. Г., САВЕЛЬЕВА.,О. В. **Математика: Учебник для 2 класса начальной школы.** В 2-х. Книга 2. - 11-е изд - М.: ВИТА-ПРЕСС, 2012. - 96 с.: ИЛ [DAVIDOV. SF, GORB. H, MIKULIN. Sr, SAVELIEV. OV, **Matemática: Livro de Leitura para Grau 2 da escola primária.** Livro 1, volume 2 - 11 ª edição - M.: VITA-PRESS, 2012a. p. 96, IL].

ДАВЫДОВ. В. В., ГОРБОВ С. МИКУЛИНА.Ф,Г. Г., САВЕЛЬЕВА.,О. В. **Математика: Учебник для 2 класса начальной школы.** В 2-х. Книга 2. - 11-е изд - М.: ВИТА-

ПРЕСС, 2012. - 96 с.: ИЛ [DAVIDOV. SF, GORB. H, MIKULIN. Sr, SAVELIEV. OV, **Matemática: Livro de Leitura para Grau 2 da escola primária.** Livro 2, volume 2 - 11 ª edição - M.: VITA-PRESS, 2012b. p. 96, IL].

# ANEXOS

**ANEXO A: Tarefas davydovianas tal como são apresentadas nos livros didáticos e de orientação**

298. Com ajuda da reta numérica encontra-se os resultados das seguintes operações[29]:

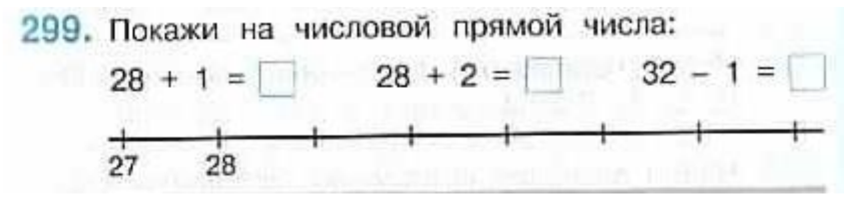

298. Выполни действия на числовой прямой.

$12_{(4)} + 1 = \square_{(4)}$ $\quad 20_{(4)} - 2 = \square_{(4)}$

$13_{(4)} + 1 = \square_{(4)}$ $\quad 23_{(4)} - 2 = \square_{(4)}$



299. Sugere-se primeiro fazer uma a operação na reta numérica: 28+1, para depois marcar na reta numérica o ponto inicial (2 dezenas 9 unidades). Em seguida executa-se a operação 28+2. Nós nos encontramos no ponto “2 dezenas e mais 10”, quer dizer que se formou mais uma dezena e obtivemos 3 dezenas e 0 unidades.


299. Покажи на числовой прямой числа:

$28 + 1 = \square$ $\quad 28 + 2 = \square$ $\quad 32 - 1 = \square$

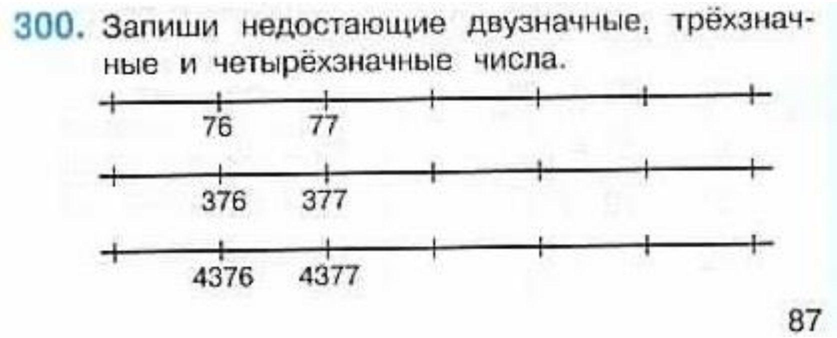


300. As crianças notam que os números são do sistema decimal. O primeiro número contem 7 dezenas e 6 unidades. O próximo – 7 dezenas e 7 unidades, em seguida 7 dezenas e 8 unidades, 7 dezenas e 9 unidades. O próximo número contem 7 dezenas e 10 unidades. Como podemos registrá-lo? Nota-se que 10 unidades formam uma nova dezena, por isso temos que anotar o seguinte número: 8 dezenas e 0 unidades. Descobre-se que os números da reta numérica seguinte se diferem dos outros, já vistos, porque entre eles existem as centenas. Lê-se a composição de cada um dos números, registra-se os números que faltam.

---

[29] A parte escrita refere-se a tradução realizada por Elvira Kim do livro de orientações (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). As ilustrações das tarefas foram retiradas dos livros didáticos (ДАВЫДОВ *et al*., 2012a; ДАВЫДОВ *et al*., 2012b). A tarefa 298 corresponde a 1ª tarefa do segundo capítulo, a próxima (299) corresponde a 2ª e assim, sucessivamente.

O professor lembra que os números na reta numérica superior chamam-se “números de dois algarismos”, e sugere dar o nome para os números que estão nas outras retas numéricas.

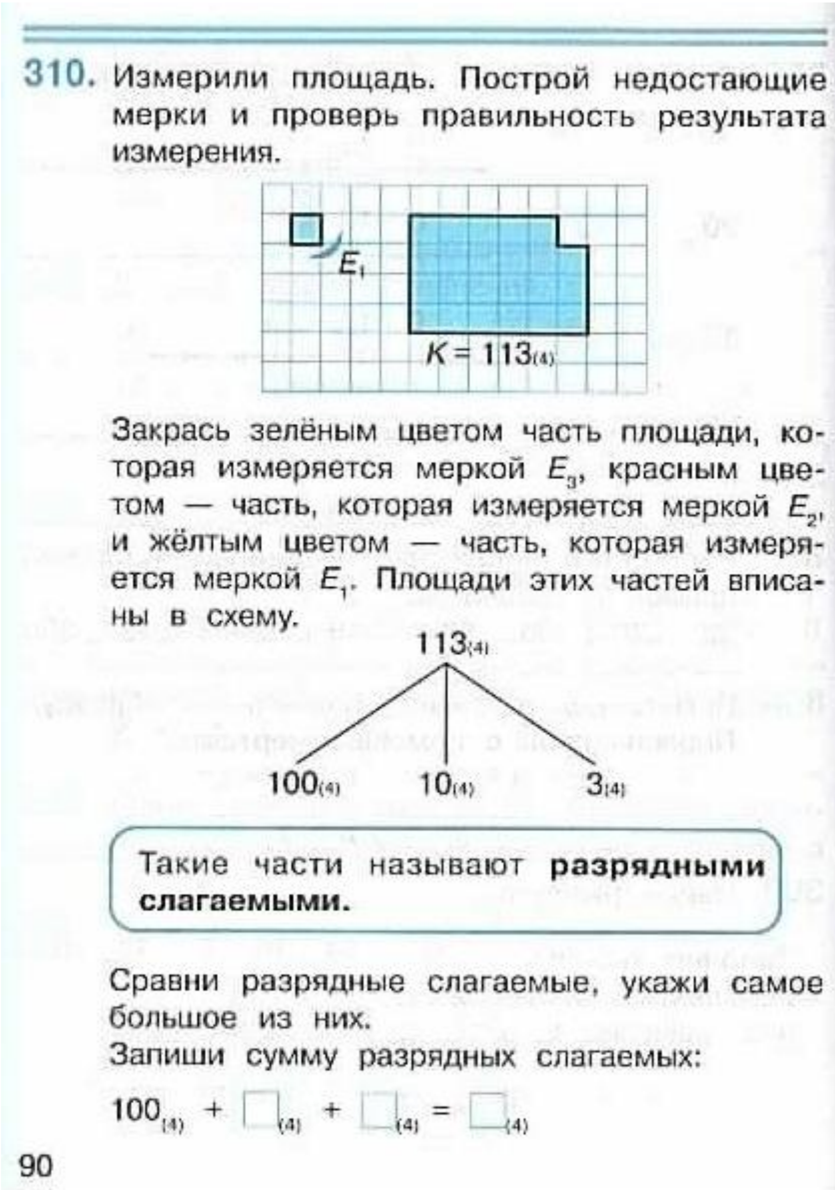



306. Inicialmente será preciso construir as retas numéricas para depois executar a comparação exigida. Os alunos devem avaliar aquele número que está mais distante do zero como o maior. Ao trabalhar com a reta numérica nota-se que não tem como marcar os números a partir do zero, mas que mesmo assim pode continuar a série dada para esquerda e para direita. Assim que os números estiverem anotados (e lidos “seis dezenas sete unidades”, etc.), faz-se a comparação.


307. Os alunos devem dizer, qual dos dois números fica mais distante do zero. É provável que a segunda metade da tarefa represente a dificuldade. Isso tem que ser acentuado. Caso as tarefas não representem a dificuldade alguma, sugere-se que as crianças comparem os números 1111 e 555. Tem que marcar os pontos de divergência e prometer voltar a discutir a questão nas próximas aulas.

307. Расположи числа на мысленной числовой прямой и сравни их.
32 ... 30 | 60 ... 80 | 248 ... 250 | 248 ... 300

310. Os alunos fazer a tarefa sem abrir o livro. Eles tem no caderno a figura igual a do livro e uma medida. Informa-se que a área foi medida pelas três crianças. Eles fizeram as medidas e em seguida trabalharam um após o outro, usando cada um a sua medida. Feito isso, as crianças anotaram o número obtido como resultado do trabalho coletivo 113 (4). Sugere-se que as crianças adivinhem (a partir do número de três algarismos), qual das crianças obteve o número maior, e qual delas obteve o número menor. É provável que os alunos caem na "pegadinha" e cheguem a conclusão que quem obteve o número maior foi o terceiro aluno.
Verifiquemos isso. Façamos as medidas adicionais. Executemos a medição com a medida maior. A parte da área que já foi medida é pintada de verde. O número obtido é anotado na tabela na terceira casa (sem os zeros) e no esquema de decomposição do número, onde é preciso anotar os zeros. Da mesma maneira faz-se as medições com as outras duas medidas e registra-se os resultados. Ao comparar as duas parcelas obtidas, temos que correlacioná-las com as partes pintadas da área. É preciso também discutir a "opinião de um aluno conhecido": ele acha que "a terceira parcela é a maior, porque no seu registro é usado número 3, quando os outros números são registrados com os números 1 e 2, e todos sabemos que o 3 é maior que o 1 e o 2!"
Chegou o momento de descobrir, como foi que obtivemos o número de medidas? Este número é composto por partes. As partes devem ser somadas.
Anota-se a soma de parcelas na tabela e fora.



**310.** Измерили площадь. Построй недостающие мерки и проверь правильность результата измерения.



Закрась зелёным цветом часть площади, которая измеряется меркой $E_3$, красным цветом — часть, которая измеряется меркой $E_2$, и жёлтым цветом — часть, которая измеряется меркой $E_1$. Площади этих частей вписаны в схему.



Такие части называют **разрядными слагаемыми.**

Сравни разрядные слагаемые, укажи самое большое из них.
Запиши сумму разрядных слагаемых:

$100_{(4)} + \square_{(4)} + \square_{(4)} = \square_{(4)}$

90

347. Certifica-se que é possível comparar os números mágicos. O professor se opõe a fazer o registro do operador correto, se referindo ao fato que não se sabe o significado do segundo algarismo em cada número. Que números podem ser esses? Pode se que o ╧ é maior que o ∩.Seleciona-se o significado menor para o ╧ (1) e o maior para o ∩ (9). Descobre-se que neste caso faltam as unidades no segundo número para obter a dezena nova, a sexta. No final chegamos a conclusão que a potência maior é mais importante para a comparação.
Na terceira e na quarta coluna "o aluno conhecido" insiste que os números são iguais, porque são registrados pelos algarismos iguais. . Ao debater essa opinião, as crianças dizem que os algarismos iguais indicam as medidas diferentes.

**347.** Сравни числа. Прочитай их, где это возможно.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6⊥ ... 5∩ | 91 ... 79 | 63 ... 36 | 26 ... 62 |
| 2⊙ ... 4⫫ | 39 ... 42 | 48 ... 84 | 76 ... 67 |

351. No primeiro caso mudará o algarismo da primeira casa, nos outros – na segunda.

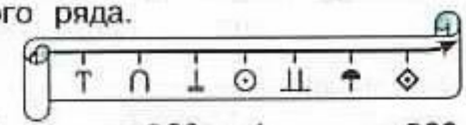
**351.** Изменится одна цифра или две?

$33_{(5)} + 1 = \square_{(5)}$ $\quad$ $26_{(7)} + 1 = \square_{(7)}$

$34_{(5)} + 1 = \square_{(5)}$ $\quad$ $12_{(3)} + 1 = \square_{(3)}$

383 A execução de algumas tarefas será possível sem consultar a série de números mágicos. Ela será necessária quando muda a quantidade de centenas.

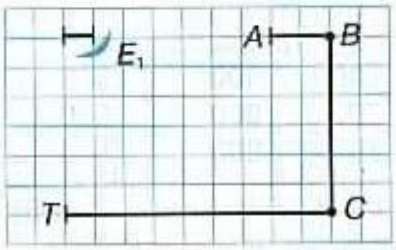
**383.** Запиши значения выражений, используя обычные и «сказочные» цифры из заданного числового ряда.




| | | |
|---|---|---|
| ⊥96 + 1 | ↑29 – 1 | ∩00 – 1 |
| ⊥99 + 1 | ◈00 – 1 | ∩99 + 1 |
| ↑99 + 1 | ⊙00 – 1 | ∩00 + 1 |

392. Após ter registrado os resultados da medição, nota-se que os números obtidos podem ser tratados como valores de algarismos de algum número.

**392.** Измерь отрезки. Найди длину ломаной линии.




| | III | II | I | |
|---|---|---|---|---|
| TC | | | | (3) |
| CB | | | | (3) |
| BA | | | | (3) |
| TCBA | | | | (3) |

$\square_{(3)} + \square_{(3)} + \square_{(3)} = \square_{(3)}$

393. É possível cometer um erro na última conta, se unir os algarismos mecanicamente num número.

**393.** Найди сумму разрядных слагаемых.

$30_{(5)} + 2_{(5)} = \square_{(5)}$ | $700 + 7 = \square$

$500_{(6)} + 20_{(6)} + 4_{(6)} = \square_{(6)}$ | $700 + 50 = \square$

$400 + 30 + 8 = \square$ | $200 + 9 + 60 = \square$

405. No decorrer do trabalho discute-se as soluções de "um aluno conhecido" do tipo: 70+2=702; 69-9 = 6 (manipulação mecânica com os números). O professor adverte que a conta que é resolvida diferentemente das outras é uma "pegadinha". Resolve-se que tal conta seria 261-6, porque não tem como resolvê-la a partir da decomposição de números. Analisa-se, por que é que as respostas 21 e 201 são erradas.

**405.** Решай, помня о разрядных слагаемых.

| | | |
|---|---|---|
| 70 + 2 | 819 − 800 | 580 − 80 |
| 69 − 9 | 453 − 50 | 300 + 40 |
| 200 + 5 | 261 − 6 | 100 + 10 |

## 7. ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS DE VÁRIOS ALGARISMOS.

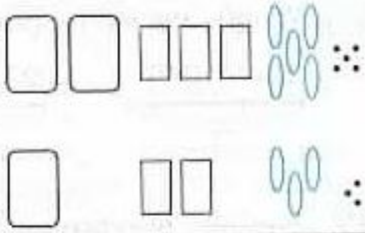
Inicialmente os cálculos por escrito são feitos com os casos que não passam da dezena ou centena. Nestas condições os trabalho pode ser inciado a partir de qualquer casa. Mais tarde, deparando-se com os casos mais difíceis, as crianças compreenderão, por que é que é mais fácil trabalhar, começando por unidades. As contas em pé fazem com que os métodos mentais de adição e subtração de números redondos fiquem claros.

32. A tarefa é feira sem consultar o livro, porém de acordo com o plano do livro. A partir do desenho temos que anotar na tabela o resultado da contagem dos lápis. Os lápis eram colocados nas caixinhas, as caixinhas estavam postas em pilhas, as pilhas – nas caixas. Levando em consideração as particularidades do sistema decimal, as crianças devem contar por conta própria qual é o conteúdo das caixinhas (10  lápis em cada qual), pilhas (10 caixinhas) e caixas (10 pilhas e cada).
Como sabemos, quantos lápis foram produzidos durante o dia de trabalho? Podemos calculas a quantidade total dos milhares, centenas e etc. Pelo desenho, ou fazê-lo trabalhando apenas com os números anotados na tabela. Estamos aprendendo a encontrar resposta trabalhando apenas com os números, por isso vamos seguir a segunda opção. Faz-se o calculo na tabela, **começando pelo algarismo de valor maior**, o resultado é verificado, contando os objetos no desenho. Ao registrarmos a contagem, mostra-se o lugar para colocar o operador e o risco que separa a incógnita dos números conhecidos.
A historinha continua. Agora uma parte dos lápis foi distribuída. Os lápis restantes podem ser contados “manualmente” ou trabalhando com a tabela. A soma obtida anteriormente é inscrita numa tabela nova, coloca-se o operador “menos”. Os cálculos são feitos **começando pelas unidades.** Em seguida um parte das unidades representadas no desenho é fechada e o restante das unidades são contadas (i.e. os resultados de cálculos feitos para cada potência são confirmados pela contagem “manual”).
Na tarefa seguinte o professor sugere que as crianças anotem o subtraendo (número de três algarismos), começando pela janela lateral esquerda da tabela. Esta sugestão é negada. Os cálculos são feitos, começando pelas unidades ou pelos milhares, a opção fica por conta das crianças.

## СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

**32.** В цехе изготовили карандаши и определили их количество в десятичной системе счисления.

До обеда



После обеда

Запишем в разрядную таблицу числа и узнаем, сколько карандашей изготовили за весь день.

| | тыс. | сот. | дес. | ед. |
|---|---|---|---|---|
| + | 2 | 3 | 5 | 5 |
| | 1 | 2 | 3 | 3 |
| | 3 | 5 | 8 | 8 |

Теперь узнаем, сколько карандашей осталось, когда 1024 карандаша раздали школьникам.

| | тыс. | сот. | дес. | ед. |
|---|---|---|---|---|
| – | 3 | 5 | 8 | 8 |
| | 1 | 0 | 2 | 4 |
| | 2 | 5 | 6 | 4 |

Сколько карандашей останется, если раздать ещё 341 карандаш?

| | тыс. | сот. | дес. | ед. |
|---|---|---|---|---|
| – | 2 | 5 | 6 | 4 |
| | | 3 | 4 | 1 |
| | | | | |

34. Tem que reescrever os números na tabela e encontrar as somas e as diferenças.

**34.** Вычисли в условной таблице, используя клетки тетради.

7435 + 452    4564 – 302
8562 – 51    21 + 2458

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| + | 7 | 4 | 3 | 5 |
| | | 4 | 5 | 2 |
| | | | | |

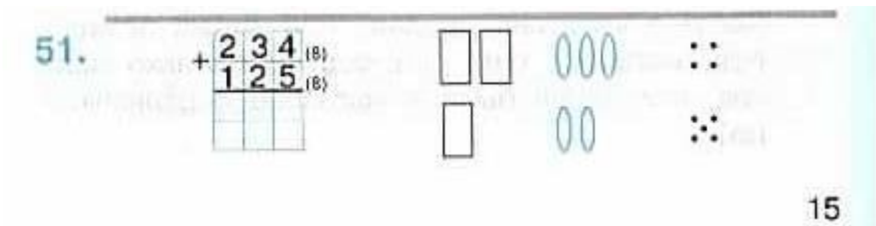
47. Temos os modelos de registros de contas, onde o primeiro número é dado e o segundo é marcado apenas com a quantidade de casas. Os aúnos devem inscrever os números convenientes (redondos) e encontrar o resultado da operação.

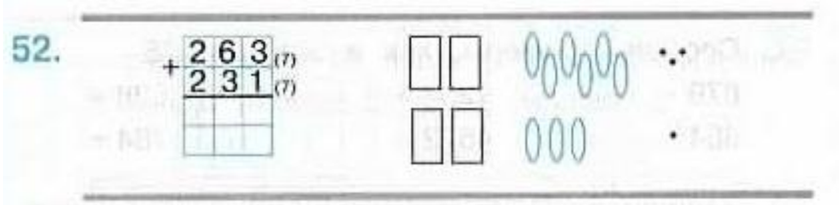
**47.** Составь примеры, как в задании 46.

| | | |
|---|---|---|
| 879 – □□ | 1253 + □□ | 628 – □ |
| 564 – □□□ | 4572 + □□□□ | 764 + □□ |

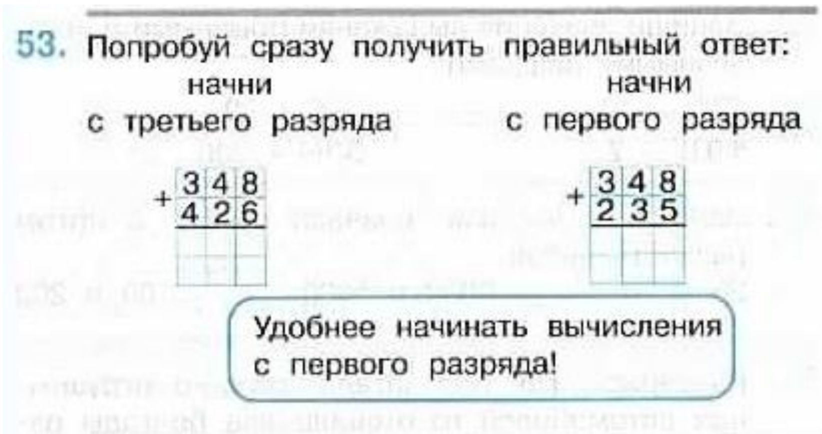
50. Inicia-se o trabalho com os livros fechados. Temos esquema de decomposição de dois números no quadro (como no livro). O professor informa o enunciado. Os dois números são inscritos na tabela, determina-se a operação necessária. O cálculo começa pelas centenas. E na casa das dezenas anota-se o número 12. Determina-se que de acordo com o sistema decimal formou-se uma nova centena. Efetua-se as correções nos registros.


51. 52. Com ajuda dos desenhos esquemáticos calcula-se as somas dos números representados nos sistemas de cálculo com as bases diferentes. O cálculo temos que iniciar hora a partir da primeira, hora a partir da terceira casa. Cada vez o resultado é anotado duas vezes: faz-se a correção no registro inicial da soma e a soma e registrada novamente da forma "exata".



53. Os alunos devem prestar atenção no fato que torna-se necessário corrigir o primeiro resultado de cálculo. A primeira conta é feita com essas correções. Na segunda conta o cálculo começa pela casa de unidades. No lugar da soma anotaremos o número 3, quando em cima da segunda casa colocaremos 1 adicional para nossa memória e desenharemos uma seta indicando na direção da casa de valor menor para a casa de valor maior (veja o modelo na próxima tarefa). Chegaremos a conclusão de que começar o cálculo pela casa menor é mais eficiente.


**53.** Попробуй сразу получить правильный ответ:

начни с третьего разряда

$$\begin{array}{r} 348 \\ +\,426 \\ \hline \end{array}$$

начни с первого разряда

$$\begin{array}{r} 348 \\ +\,235 \\ \hline \end{array}$$

Удобнее начинать вычисления с первого разряда!

54. Ao efetuar as contas temos que avaliar se as setas estão sendo colocadas de forma correta, no último caso a seta é colocada pelos alunos sem ajuda do professor. Tem que prestar atenção para o seguinte fato: a formação do novo algarismo pode ocorrer em qualquer casa dos números somados.


**54.** Реши. Новую единицу старшего разряда приписывай сверху.

$$\begin{array}{r} 1\phantom{000} \\ 1675 \\ +\,3524 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\phantom{00} \\ 289 \\ +\,306 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 472 \\ +\,375 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4294 \\ +\,1522 \\ \hline \end{array}$$

57. Temos que inscrever a segunda parcela de tal modo que se forme uma nova parcela, unidade de valor.

57. $7_{(8)} + \square_{(8)} = 10_{(8)}$ $\quad$ $5_{(6)} + \square_{(6)} = 10_{(6)}$

$70_{(8)} + \square_{(8)} = 100_{(8)}$ $\quad$ $5_{(9)} + \square_{(9)} = 10_{(9)}$

$700_{(8)} + \square_{(8)} = 1000_{(8)}$ $\quad$ $5_{(7)} + \square_{(7)} = 10_{(7)}$

62. A análise de casos de adição dados mostra que é melhor fazê-los com ajuda da tabela. Porém gasta-se muito tempo fazendo a tabela. Descobre-se que os quadradinhos no caderno ajudarão a colocar os números corretamente – casa embaixo da casa. O trabalho é feito nos cadernos comuns.

62. Выполни действия столбиком.

| | | |
|---|---|---|
| 453 + 283 | 453 + 29 | 435 + 821 |
| 35 + 192 | 435 + 821 | 35 + 328 |

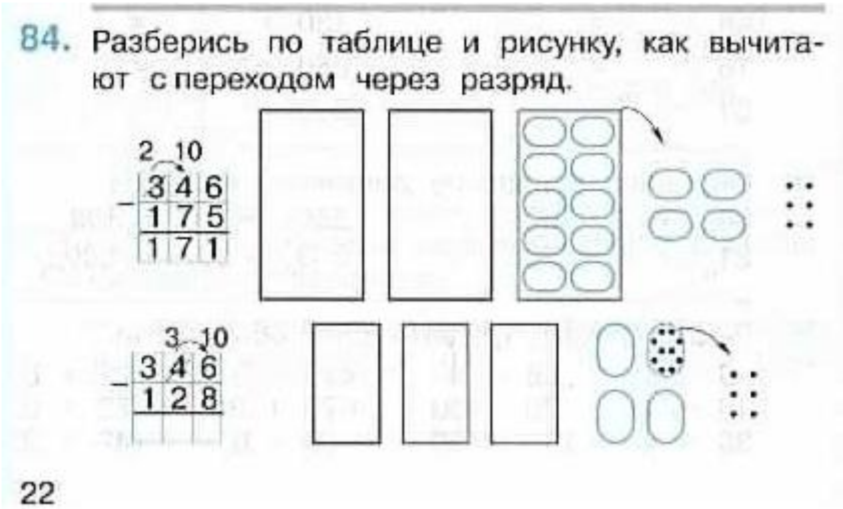
66. Na primeira conta notamos a passagem das unidades para as dezenas, porém no decorrer da solução descobriremos (e marcaremos com a seta e com o número 1) que temos mais uma passagem do valor do algarismo - das dezenas para as centenas. Nas contas seguintes determinamos a presença de várias passagem de valor com antecedência.

66. Сначала отметь переход через разряд, потом реши.

$$\begin{array}{r} 347 \\ +\,193 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 347 \\ +\,475 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 347 \\ +\,886 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 347 \\ +\,287 \\ \hline \end{array}$$

73. $135_{(7)} + 222_{(7)}$ $\qquad$ $256_{(9)} + 241_{(9)}$

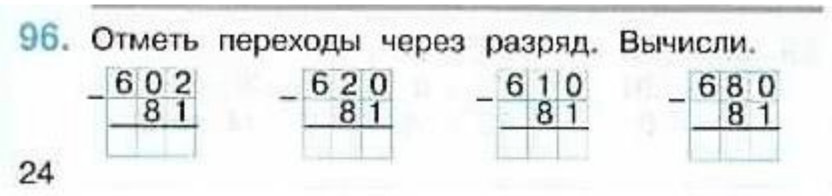
84. As particularidade de subtração de números de vários algarismos com a passagem do seu valor relativo são demonstrados por meio de um desenho esquemático.




85. As duas contas se diferem pela base do sistema de cálculo. Descobre-se que nos ambos os casos é preciso decompor a dezena (unidade da segunda casa) em unidades (unidade da primeira casa). O conteúdo da unidade maior é diferente em cada um de dois casos, por isso as respostas serão diferentes: 215(8) e 213 (6).


90. Os alunos trabalham com os casos de uma passagem de valor ou duas passagens, não interligadas uma com a outra.


96. Sugere-se as contas com as duas passagens interligadas de valor.


96. Отметь переходы через разряд. Вычисли.

$602 - 81$ $\quad 620 - 81$ $\quad 610 - 81$ $\quad 680 - 81$

24

120. No decorrer de cálculos temos que detectar os casos do novo tipo. Os alunos devem tentar contar, qual é a dificuldade ao fazê-los (não está claro, como subtrair as unidades, pois não tem como emprestar das dezenas). O calculo é adiado até o final da aula.


120. Реши. Найди новые случаи.

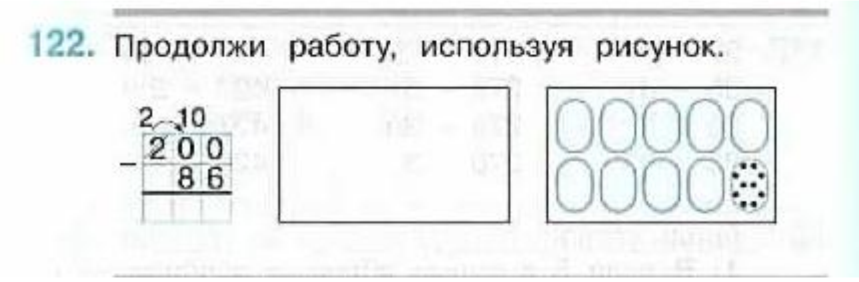
$705 - 425$ $\quad 820 - 658$ $\quad 900 - 304$ $\quad 700 - 257$

121,122. Os casos representados devem ser analisados, trabalhando no quadro e nos cadernos, assim todos os registros, contidos no livro, podem ser feitos no decorrer da análise, acompanhados de representação esquemática da composição do número pelos seus valores.


121. Объясни, как выполнили вычисление.

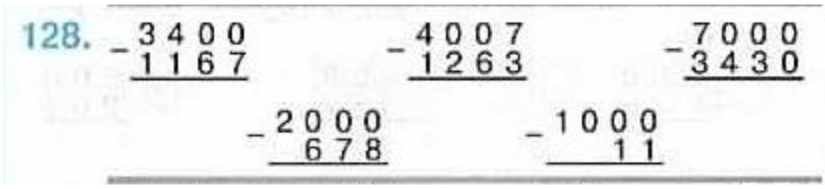


30

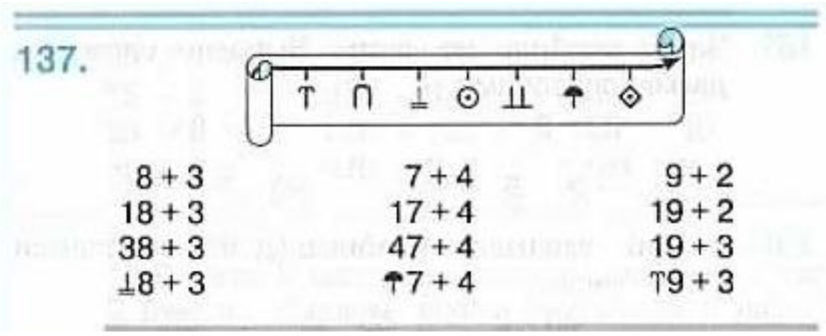

122. Продолжи работу, используя рисунок.

2 10
200
− 86

128.


128. 3400 − 1167    4007 − 1263    7000 − 3430
2000 − 678    1000 − 11

137. O resultado principal de trabalho é nestes casos de adição acontece o aumento de quantidade de dezenas - fica uma a mais. As respostas as contas mágicas são: (p. 77)


137.

| | | |
|---|---|---|
| 8 + 3 | 7 + 4 | 9 + 2 |
| 18 + 3 | 17 + 4 | 19 + 2 |
| 38 + 3 | 47 + 4 | 19 + 3 |
| ⊥8 + 3 | ↑7 + 4 | ⊤9 + 3 |

158.


158. Реши. Составь столбики, похожие на первый.

| | | |
|---|---|---|
| 13 − 5 | 21 − 5 | 18 + 5 |
| 23 − 5 | □ − □ | □ + □ |
| 43 − 5 | □ − □ | □ + □ |
| ⊥3 − 5 | ⊙1 − 5 | ∩8 + 5 |