

Universidade do Sul de Santa Catarina

Tópicos de Matemática Elementar II

Disciplina na modalidade a distância

2ª edição revista e atualizada

Palhoça

UnisulVirtual

2007

Créditos

Unisul - Universidade do Sul de Santa Catarina UnisulVirtual - Educação Superior a Distância

Campus UnisulVirtual

Avenida dos Lagos, 41
Cidade Universitária Pedra Branca
Palhoça – SC - 88137-100
Fone/fax: (48) 3279-1242 e
3279-1271
E-mail: cursovirtual@unisul.br
Site: www.virtual.unisul.br

Reitor Unisul

Gerson Luiz Joner da Silveira

Vice-Reitor e Pró-Reitor Acadêmico

Sebastião Salésio Heerdt

Chefe de Gabinete da Reitoria

Fabian Martins de Castro

Pró-Reitor Administrativo

Marcus Vinícius Anátoles da Silva
Ferreira

Campus Sul

Diretor: Valter Alves Schmitz Neto
Diretora adjunta: Alexandra
Orsoni

Campus Norte

Diretor: Ailton Nazareno Soares
Diretora adjunta: Cibele Schuelter

Campus UnisulVirtual

Diretor: João Vianney
Diretora adjunta: Jucimara
Roesler

Equipe UnisulVirtual

Administração

Renato André Luz
Valmir Venício Inácio

Avaliação Institucional

Dênia Falcão de Bittencourt

Biblioteca

Soraya Arruda Waltrick

Capacitação e Apoio Pedagógico à Tutoria

Angelita Marçal Flores
(Coordenadora)
Caroline Batista
Enzo de Oliveira Moreira
Patrícia Meneghel

Vanessa Francine Corrêa Coordenação dos Cursos

Adriano Sérgio da Cunha
Aloísio José Rodrigues
Ana Luisa Mülbart
Ana Paula Reusing Pacheco
Charles Cesconetto
Diva Marília Flemming
Fabiano Ceretta
Itamar Pedro Bevilaqua
Janete Elza Felisbino
Jucimara Roesler
Lauro José Ballock
Lívia da Cruz (Auxiliar)
Luiz Guilherme Buchmann
Figueiredo
Luiz Otávio Botelho Lento
Marcelo Cavalcanti
Maria da Graça Poyer
Maria de Fátima Martins
(Auxiliar)
Mauro Faccioni Filho
Michelle D. Durieux Lopes Destri
Moacir Fogaça
Moacir Heerdt
Nélio Herzmann
Onei Tadeu Dutra
Patrícia Alberton
Raulino Jacó Brüning
Rodrigo Nunes Lunardelli
Simone Andréa de Castilho
(Auxiliar)

Criação e Reconhecimento de Cursos

Diane Dal Mago
Vanderlei Brasil

Desenho Educacional

Design Instrucional
Daniela Erani Monteiro Will
(Coordenadora)
Carmen Maria Cipriani Pandini
Carolina Hoeller da Silva Boeing
Flávia Lumi Matuzawa
Karla Leonora Dahse Nunes
Leandro Kingeski Pacheco
Ligia Maria Soufen Tumolo
Márcia Loch
Viviane Bastos
Viviani Poyer

Acessibilidade

Vanessa de Andrade Manoel

Avaliação da Aprendizagem

Márcia Loch (Coordenadora)
Cristina Klipp de Oliveira
Silvana Denise Guimarães

Design Gráfico

Cristiano Neri Gonçalves Ribeiro
(Coordenador)
Adriana Ferreira dos Santos
Alex Sandro Xavier
Evandro Guedes Machado
Fernando Roberto Dias
Zimmermann
Higor Ghisi Luciano
Pedro Paulo Alves Teixeira
Rafael Pessi
Wilson Martins Filho

Disciplinas a Distância

Tade-Ane de Amorim
Cátia Melissa Rodrigues

Gerência Acadêmica

Patrícia Alberton

Gerência de Ensino

Ana Paula Reusing Pacheco

Logística de Encontros Presenciais

Márcia Luz de Oliveira
(Coordenadora)
Aracelli Araldi
Graciele Marinês Lindenmayr
Leticia Cristina Barbosa
Kênia Alexandra Costa Hermann
Priscila Santos Alves

Formatura e Eventos

Jackson Schuelter Wiggers

Logística de Materiais

Jeferson Cassiano Almeida da
Costa (Coordenador)
José Carlos Teixeira
Eduardo Kraus

Monitoria e Suporte

Rafael da Cunha Lara
(Coordenador)
Adriana Silveira
Andréia Drewes
Caroline Mendonça
Cristiano Dalazen
Dyego Rachadel
Edison Rodrigo Valim
Francielle Arruda
Gabriela Malinverni Barbieri
Jonatas Collaço de Souza
Josiane Conceição Leal
Maria Eugênia Ferreira Celeghin
Rachel Lopes C. Pinto
Vinícius Maykot Serafim

Produção Industrial e Suporte

Arthur Emmanuel F. Silveira
(Coordenador)
Francisco Asp

Relacionamento com o Mercado

Walter Félix Cardoso Júnior

Secretaria de Ensino a Distância

Karine Augusta Zanoni
Albuquerque
(Secretária de ensino)
Ana Paula Pereira
Andréa Luci Mandira
Carla Cristina Sbardella
Deise Marcelo Antunes
Djeime Sammer Bortolotti
Franciele da Silva Bruchado
Grasiela Martins
James Marcel Silva Ribeiro
Jenniffer Camargo
Lamuniê Souza
Luana de Lima Bezerra
Liana Pamplona
Marcelo José Soares
Marcos Alcides Medeiros Junior
Maria Isabel Aragon
Olavo Lajús
Priscilla Geovana Pagani
Rosângela Mara Siegel
Silvana Henrique Silva
Vanilda Liordina Heerdt
Vilmar Isaurino Vidal

Secretária Executiva

Viviane Schalata Martins

Tecnologia

Osmar de Oliveira Braz Júnior
(Coordenador)
Jefferson Amorin Oliveira
Ricardo Alexandre Bianchini

Apresentação

Este livro didático corresponde à disciplina **Tópicos de Matemática Elementar II**.

O material foi elaborado visando a uma aprendizagem autônoma, abordando conteúdos especialmente selecionados e adotando uma linguagem que facilite seu estudo a distância.

Por falar em distância, isso não significa que você estará sozinho. Não esqueça que sua caminhada nesta disciplina também será acompanhada constantemente pelo Sistema Tutorial da UnisulVirtual. Entre em contato sempre que sentir necessidade, seja por correio postal, fax, telefone, e-mail ou Espaço UnisulVirtual de Aprendizagem - EVA. Nossa equipe terá o maior prazer em atendê-lo, pois sua aprendizagem é nosso principal objetivo.

Bom estudo e sucesso!

Equipe UnisulVirtual.

Diva Marília Flemming

Elisa Flemming Luz

Tópicos de Matemática Elementar II

Livro didático

2ª edição revista e atualizada

Design instrucional

Karla Leonora Dahse Nunes

Palhoça

UnisulVirtual

2007

Copyright © UnisulVirtual 2007

Nenhuma parte desta publicação pode ser reproduzida por qualquer meio sem a prévia autorização desta instituição.

Edição – Livro Didático

Professor Conteudista

Diva Marília Flemming
Elisa Flemming Luz

Design Instrucional

Karla Leonora Dahse Nunes

ISBN 978-85-60694-97-6

Projeto Gráfico e Capa

Equipe UnisulVirtual

Diagramação

Evandro Guedes Machado
Wilson Martins Filho (2ª edição)

Revisão Ortográfica

B2B

510

F62 Flemming, Diva Marília

Tópicos de matemática elementar II : livro didático / Diva Marília
Flemming, Elisa Flemming Luz ; design instrucional Karla Leonora Dahse
Nunes. - 2. ed. rev. e atual. - Palhoça : UnisulVirtual, 2007.
157 p. : il. ; 28 cm.

Inclui bibliografia.
ISBN 978-85-60694-97-6

I. Matemática. I. Nunes, Karla Leonora Dahse. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária da Unisul

Sumário

Palavras das professoras	09
Plano de estudo	11
UNIDADE 1 – Análise Combinatória	15
UNIDADE 2 – Binômio de Newton	53
UNIDADE 3 – Polinômios	75
UNIDADE 4 – Equações Polinomiais e Funções Polinomiais	101
Para concluir o estudo	127
Referências	129
Sobre as professoras conteudistas	131
Atividades de auto-avaliação: Respostas e comentários	133

Palavras das professoras



Prezado participante do curso!

Neste livro apresentamos conteúdos de Matemática relativos à disciplina Tópicos de Matemática Elementar II. Todos conceitos apresentados são considerados básicos para a sua formação inicial e são discutidos no ensino médio da Educação Básica. Vamos ampliar idéias objetivando-se atender as especificidades do projeto pedagógico do curso que preconiza a inserção sistemática de elementos da História da Matemática.

Considerando-se que o mundo atual exige a formação de um profissional com competência e habilidades para atuar num contexto informatizado, no decorrer desse livro vamos incentivá-lo e orientá-lo para o uso de recursos tecnológicos.

Para iniciar um relacionamento com as demais disciplinas do curso, em especial com as disciplinas de Prática de Ensino, vamos de forma sistemática chamar a atenção para aspectos didáticos do processo ensino-aprendizagem da Matemática.

Observando que estamos trabalhando no contexto da Educação a Distância, adotamos uma linguagem coloquial na parte textual, mostrando sempre as diferentes linguagens utilizadas pela matemática. Essa escolha propiciará à você o desenvolvimento sistemático de diferentes representações semióticas dos objetos matemáticos.

Na disciplina Tópicos de Matemática Elementar I, você recebeu o convite para ingressar no maravilhoso

mundo da educação matemática, agora, nesta disciplina, vamos juntos avançar buscando sempre um diálogo virtual criativo e sistemático.

Vamos lá?

Profa. Diva Marília Flemming, Dra.

Profa. Elisa Flemming Luz, Dra.



Plano de estudo

O plano de estudos visa a orientá-lo/a no desenvolvimento da disciplina. Nele, você encontrará elementos que esclarecerão o contexto da disciplina e sugerirão formas de organizar o seu tempo de estudos.

O processo de ensino e aprendizagem na UnisulVirtual leva em conta instrumentos que se articulam e se complementam. Assim, a construção de competências se dá sobre a articulação de metodologias e por meio das diversas formas de ação/mediação.

São elementos deste processo:

- o livro didático;
- o Espaço UnisulVirtual de Aprendizagem - EVA;
- as atividades de avaliação (complementares, a distância e presenciais).

Ementa da disciplina

Análise Combinatória: permutações, arranjos e combinações. Binômio de Newton. Noções de grafos. Aplicações.

Polinômios: Estrutura algébrica de polinômios. Aritmética polinomial. Algoritmo de Euclides. Fatoração de polinômios. Discussão das equações polinomiais (aspectos históricos). Teorema Fundamental da Álgebra (enunciado e aplicações). Funções polinomiais.

Carga horária:

30 horas – 2 créditos

Objetivos

Geral

Analisar e discutir os conteúdos de análise combinatória, binômio de Newton e polinômios a partir do desenvolvimento de situações problema, cuja modelagem envolve diferentes representações semióticas.

Específicos

- Compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam desenvolver estudos posteriores envolvendo conteúdos de matemática básica;
- Analisar objetos de estudo a partir de diferentes representações semióticas;
- Aplicar conhecimentos matemáticos nas situações problemas e nas tomadas de decisões;
- Desenvolver a capacidade de análise e resolução de problemas;
- Utilizar corretamente procedimentos e ferramentas tecnológicas na resolução de problemas;
- Desenvolver o espírito de equipe estimulando a pesquisa.

Conteúdo programático/objetivos

Os objetivos de cada unidade definem o conjunto de conhecimentos que você deverá deter para o desenvolvimento de habilidades e competências necessárias a sua formação. Neste sentido, veja a seguir as unidades que compõem o Livro Didático desta disciplina, bem como os seus respectivos objetivos.

Unidades de estudo: 4

Unidade 1 - Análise Combinatória

No decorrer desta unidade são apresentados os conceitos básicos da Análise Combinatória e a resolução de diferentes tipos de problemas que são modelados com essa ferramenta matemática. A reflexão sistemática no decorrer de todo o texto permite o desenvolvimento de competências necessárias para a formação profissional do professor de matemática.

Unidade 2 - Binômio de Newton

A identificação e a reflexão dos procedimentos utilizados na expansão do binômio de Newton são discutidas nesta unidade, propiciando a visualização do formalismo matemático no decorrer da sua formação histórica e tecnológica.

Unidade 3 - Polinômios

Reconhecer polinômios em diferentes expressões algébricas facilita a formação de competências para a resolução de problemas, pois na prática, deparamos sempre com problemas que são modelados com expressões polinomiais. A álgebra, presente no decorrer do estudo, formaliza o desenvolvimento do pensamento organizado necessário no dia-a-dia do ser humano.

Unidade 4 - Equações Polinomiais e Funções Polinomiais


Nesta unidade retoma-se o estudo de equações e funções polinomiais, para avançar na reflexão teórica e didática dos objetos matemáticos envolvidos. Os recursos computacionais abordados direcionam o olhar para o mundo atual, mostrando a importância da matemática na formação pessoal e cultural em diferentes profissões.

Agenda de atividades / Cronograma

- Verifique com atenção o EVA, organize-se para acessar periodicamente o espaço da disciplina. O sucesso nos seus estudos depende da priorização do tempo para a leitura; da realização de análises e sínteses do conteúdo; e da interação com os seus colegas e tutor.

- Não perca os prazos das atividades. Registre no espaço a seguir as datas, com base no cronograma da disciplina disponibilizado no EVA.

- Use o quadro para agendar e programar as atividades relativas ao desenvolvimento da disciplina.

Atividades obrigatórias	
Demais atividades (registro pessoal)	

UNIDADE 1

Análise Combinatória

1



Objetivos de aprendizagem

- Conhecer os conceitos básicos do estudo da Análise Combinatória.
- Resolver problemas que utilizam na sua solução conceitos da Análise Combinatória.
- Analisar e refletir sobre o uso de diferentes ferramentas didáticas no ensino da análise combinatória.



Seções de estudo

- Seção 1** Conjuntos Finitos em Estudo
- Seção 2** Identificando Arranjos, Permutações e Combinações
- Seção 3** Introduzindo fórmulas para a resolução de problemas
- Seção 4** Uso do fatorial
- Seção 5** Agrupamento com repetição de elementos



Para início de conversa

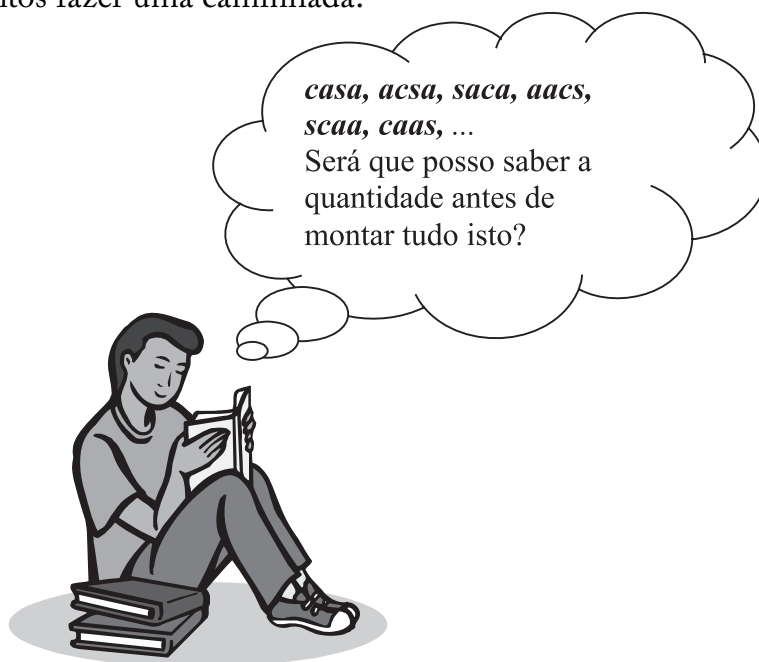
Na análise combinatória você poderá observar métodos que permitem contar números de elementos de um conjunto formado sob específicas condições.

Diversas fórmulas são estabelecidas para facilitar o processo de contagem.

A aplicação básica desta ferramenta está na resolução de diferentes situações problemas originadas historicamente, de forma recreativa ou no contexto do dia-a-dia.

Acompanhe sempre o raciocínio proposto no decorrer do texto para que você possa identificar as situações que caracterizam as combinações, os arranjos e as permutações.

Vamos juntos fazer uma caminhada!



SEÇÃO 1 - Conjuntos Finitos em Estudo

Para iniciar o estudo da Análise Combinatória é fundamental conhecer a natureza dos conjuntos que vamos trabalhar.



Olhando o passado!

Em 1915, a “Análise Combinatória” ganhou destaque com a publicação de Percy Alexander MacMahon (1854 - 1929). Destaca-se o matemático Paul Erdős (1913 – 1996), que auxiliou muito na resolução de problemas e na formalização da Análise Combinatória. Têm-se registros de que a Análise Combinatória já era discutida no século XVI, pelo matemático italiano Niccolò Fontana (1500-1557), conhecido como Tartaglia. Depois dele, vieram os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662).

Para acompanhar as idéias, você deverá refletir e desenvolver cada questão apresentada no decorrer do texto antes de seguir em frente. Observe as respostas que estão dentro do quadro ou no rodapé e retorne às questões caso haja dúvida.

Responda as seguintes questões:

1. Escreva o conjunto A dos números pares maiores que 3 e menores que 11.
2. Quantos elementos têm o conjunto A ?
3. Escreva o conjunto B formado por anagramas da palavra PAR.
4. Quantos elementos têm o conjunto B ?
5. Seja C o conjunto de números de 3 algarismos, todos distintos, formados com os dígitos 1,2,3,4,5,6,7 e 8. Quantos elementos têm o conjunto C ?



Pare! Observe!

Anagrama é uma palavra ou frase formada pela transposição das letras de outra palavra ou frase. Ex.: *Belisa* (de *Isabel*).

“E dizem que a *Iracema* do romance de Alencar é o anagrama de *América*.” (RIBEIRO, *Curiosidades Verbais*, p. 76).



Respostas:

1. $A = \{4, 6, 8, 10\}$
 2. quatro
 3. $B = \{\text{PAR, PRA, APR, ARP, RPA, RAP}\}$
 4. seis
 5. $C = \{123, 321, \dots, 231\}$ – É uma tarefa árdua!
-

Veja que:

- a resposta da questão 5 não é obtida rapidamente;
- os conjuntos B e C têm os seus elementos formados de forma diferente que os elementos do conjunto A;
- os elementos dos conjuntos B e C são **AGRUPAMENTOS** formados sob certas condições.

Na análise combinatória você vai trabalhar com conjuntos finitos cujos elementos são agrupamentos, portanto, com conjuntos do tipo dos conjuntos B e C.

Analise as seguintes situações experimentais:

Situação 1: Quatro livros precisam ser arrumados em uma prateleira na posição vertical. As figuras 1.1, 1.2 e 1.3 mostram as alocações realizadas por Maria, João e José respectivamente.



Figura 1.1

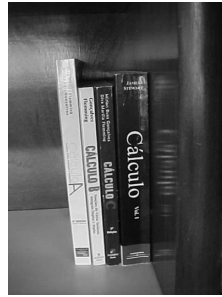


Figura 1.2

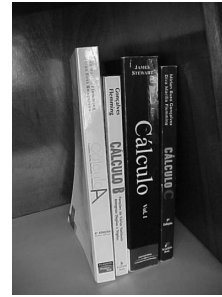


Figura 1.3



**Você pode dispor os livros de outra maneira?
Se sim, quais?¹**

Situação 2: Uma criança tem 3 brinquedos: uma bola, um carrinho e um aviãozinho. Sua mãe sugeriu que primeiro brincasse com o carrinho e quando o seu colega chegasse, fosse brincar com a bola. No final da tarde brincaria com o aviãozinho.

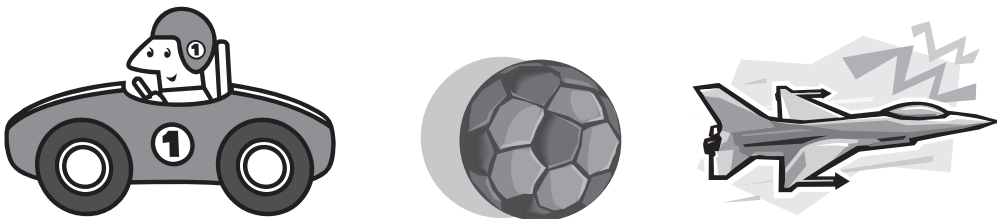


Figura 1.4

A criança, no entanto, preferiu brincar primeiro com o aviãozinho, depois de carrinho e, por último, com a bola (ver Figura 1.5).

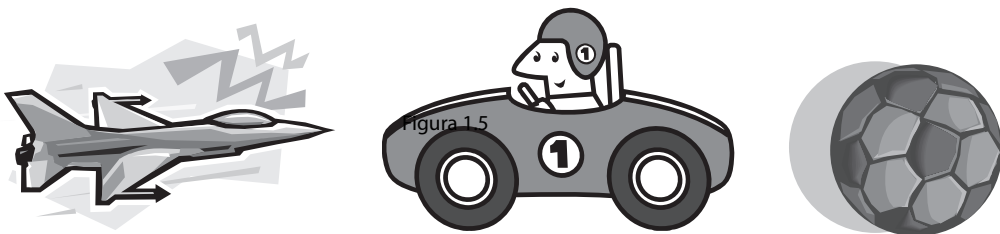


Figura 1.5

¹ Se você realizou a experiência deve ter respondido 'Sim' e deve ter encontrado outras 21 posições, totalizando 24 opções.



***Você acha que a criança poderia fazer uma escolha diferente?*²**

No dia seguinte, a mãe da criança sugeriu que ele brincasse somente com dois brinquedos dentre os seus três brinquedos preferidos (avião, carro e bola). A criança optou por brincar com o aviãozinho e o carrinho (ver Figura 1.6).

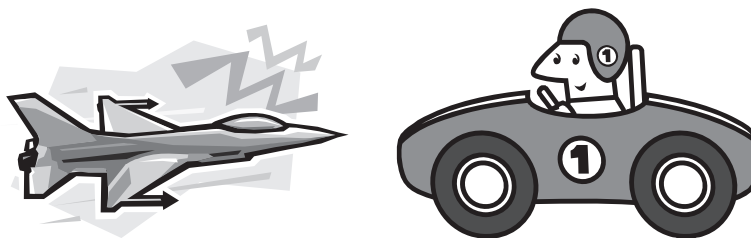


Figura 1.6



***A criança poderia ter feito outras escolhas?*³**



***Se a criança brincar primeiro de aviãozinho e depois com o carrinho ou se primeiro brincar de carrinho para depois brincar de aviãozinho, estaria contrariando a sugestão de sua mãe?*⁴**

Nas situações dadas você pode observar dois conjuntos:

- (1) O conjunto cujos elementos ou agrupamentos são maneiras de arrumar 4 livros em uma prateleira;
- (2) O conjunto cujos elementos são brinquedos escolhidos por uma criança para brincar, sob certas condições.

² Sim; poderia ter 4 outras opções, totalizando 6 opções.

³ Sim; poderia ter duas outras opções totalizando-se 3 opções.

⁴ Não, porque a sugestão era brincar com dois brinquedos, não importando a ordem.



**Volte na situação 1 e observe os agrupamentos. São diferentes pela sua ordem ou por sua natureza?⁵
E na situação 2?⁶**

As experiências realizadas mostraram que no dia-a-dia é possível identificar situações simples que nos mostram a formação de agrupamentos. Na seção seguinte você vai analisar essas experiências dando um foco maior para a quantidade de agrupamentos que são obtidos em diferentes situações práticas.

SEÇÃO 2 - Identificando Arranjos, Permutações e Combinações

Analise os seguintes exemplos e observe a formação dos agrupamentos.

EXEMPLOS:

(1) Encontre os números de dois algarismos distintos que podem ser formados usando 2, 3, 4 e 5.

Resposta:

23	24	25	32	34	35	42	43	45	52	53	54
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

(2) Forme todas as possíveis equipes com dois alunos usando os alunos João, José, Maria, Clara e Lúcia.

Resposta:

{João, José}; {João, Maria}; {João, Clara}; {João, Lúcia}; {José, Maria}; {José, Clara}; {José, Lúcia}; {Maria, Clara}; {Maria, Lúcia}; {Clara, Lúcia}
--

(3) Encontre os números de 3 algarismos distintos que podem ser formados, usando 4,5 e 7.

Resposta:

457	475	547	574	745	754
-----	-----	-----	-----	-----	-----

⁵ Pela sua ordem.

⁶ Pela ordem, no primeiro momento e, pela natureza, no segundo momento.

Volte aos resultados obtidos e confira:

- No exemplo (1) os agrupamentos diferem entre si pela **ORDEM** (por exemplo, 23 e 32) ou pela **NATUREZA** (por exemplo, 34 e 52).
- No exemplo (2) um agrupamento é diferente do outro apenas pela **NATUREZA** dos elementos componentes.
- No exemplo (3) cada agrupamento é constituído por todos os elementos e diferem entre si pela **ORDEM**.



Os exemplos (1), (2) e (3) exemplificam **Arranjos simples, Combinações simples e Permutações simples** respectivamente.

Você poder utilizar as seguintes notações:

Exemplo (1)	$A_{4,2}$	Arranjo Simples
Exemplo (2)	$C_{5,2}$	Combinação Simples
Exemplo (3)	P_3	Permutação Simples

Compare os exemplos (1) e (3) e observe que podemos considerar a permutação simples como um caso particular de arranjos simples.

Podemos analisar o exemplo (1) e desenvolver um raciocínio lógico representado por um diagrama de árvore visualizado na Figura 1.7.

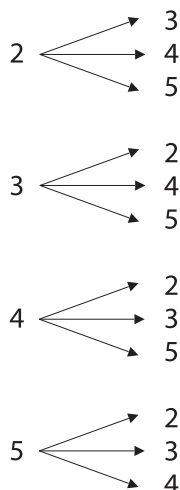


Figura 1.7

**Pare! Observe!**

No decorrer do estudo da matemática é muito usual o estabelecimento do objetivo “desenvolver o raciocínio lógico”. Na maioria das vezes isto não é possível, pois as atividades apresentadas não propiciam efetivamente a construção dessa competência. Neste momento, efetivamente, estamos diante de uma situação que organiza o pensamento lógico.

Veja que o problema pode ser visualizado por duas etapas sucessivas e independentes de tal modo que na:

- primeira etapa têm-se 4 possibilidades;
- segunda etapa têm-se 3 possibilidades.

O resultado final é o resultado do produto das possibilidades de cada etapa: $4 \times 3 = 12$.

A representação da Figura 1.7 é denominada de ‘árvore das possibilidades’ e é bastante usada no contexto do estudo das Probabilidades. O princípio estabelecido para encontrar a solução é denominado de **Princípio Fundamental da Contagem**.

Observe que podemos usar este princípio no exemplo (3) e não podemos usá-lo no exemplo (2). No exemplo (2) não podemos formular o problema como etapas sucessivas independentes.

Verifique na Figura 1.8 a árvore de possibilidades do exemplo (3). Tem-se $3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades.

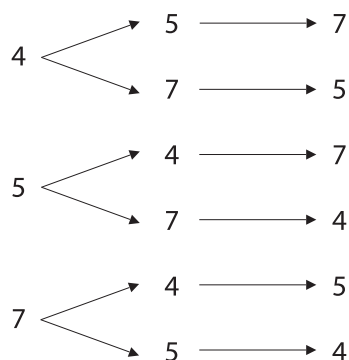


Figura 1.8

Com os algarismos 4, 5, 6 e 7, quantos números de 2 algarismos, sem os repetir, podemos formar? Quantos números de 3 algarismos? Quantos números de 4 algarismos? Exemplifique alguns agrupamentos e indique se eles diferem pela ordem e/ou natureza.

Solução:

Tem-se um conjunto de 12 números de 2 algarismos cada: 45, 46, 47, 54, 56, 57, 64, 65, 67, 74, 75, e 76. Esses elementos são diferentes pela natureza dos algarismos (por exemplo, 46 e 54) ou pela ordem (por exemplo, 45 e 54). Estamos diante de Arranjos simples e podemos denotar $A_{4,2} = 12$.

Tem-se um conjunto de 24 números de 3 algarismos cada: 456, 457, 465, 467, 475, 476, 546, 547, 564, 567, 574, 576, 645, 647, 654, 657, 674, 675, 745, 746, 754, 756, 764, 765. Esses elementos são diferentes pela natureza dos algarismos (por exemplo, 456 e 567) ou pela ordem (por exemplo, 456, 564 ou 645). Podemos denotar como $A_{4,3} = 24$.

Tem-se um conjunto de 24 números de 4 algarismos cada: 4567, 4576, 4657, 4675, 4756, 4765, 5467, 5476, 5647, 5674, 5746, 5764, 6457, 6475, 6547, 6574, 6745, 6755, 7456, 7465, 7546, 7564, 7645, 7654. Para este caso os agrupamentos diferem apenas pela ordem de seus elementos. Denotamos por $A_{4,4} = 24$.

Esse exemplo poderia se resolvido sem a enumeração dos agrupamentos, pois bastaria verificar o número de possibilidades de ocorrência em cada etapa da formação da árvore de possibilidades.

**Olhando o presente!**

P1. Escolha 3 colegas da sua turma e verifique quantas duplas poderão ser formadas.

Este problema mostra uma situação em que os agrupamentos diferem apenas pela natureza. Supondo que você tenha escolhido os colegas A, B e C, as duplas a serem formadas são: AB, AC e BC. Neste caso, estamos diante de Combinações Simples e denotamos por $C_{3,2} = 6$.

O Princípio Fundamental da Contagem apresenta um método para determinar o número de possibilidades de ocorrência de um acontecimento sem a necessidade de descrever todas as possibilidades. Assim, o seu uso facilita a conclusão de diferentes tipos de problemas.



Princípio Fundamental da Contagem

Se um acontecimento pode ocorrer por várias etapas sucessivas e independentes de tal modo que:

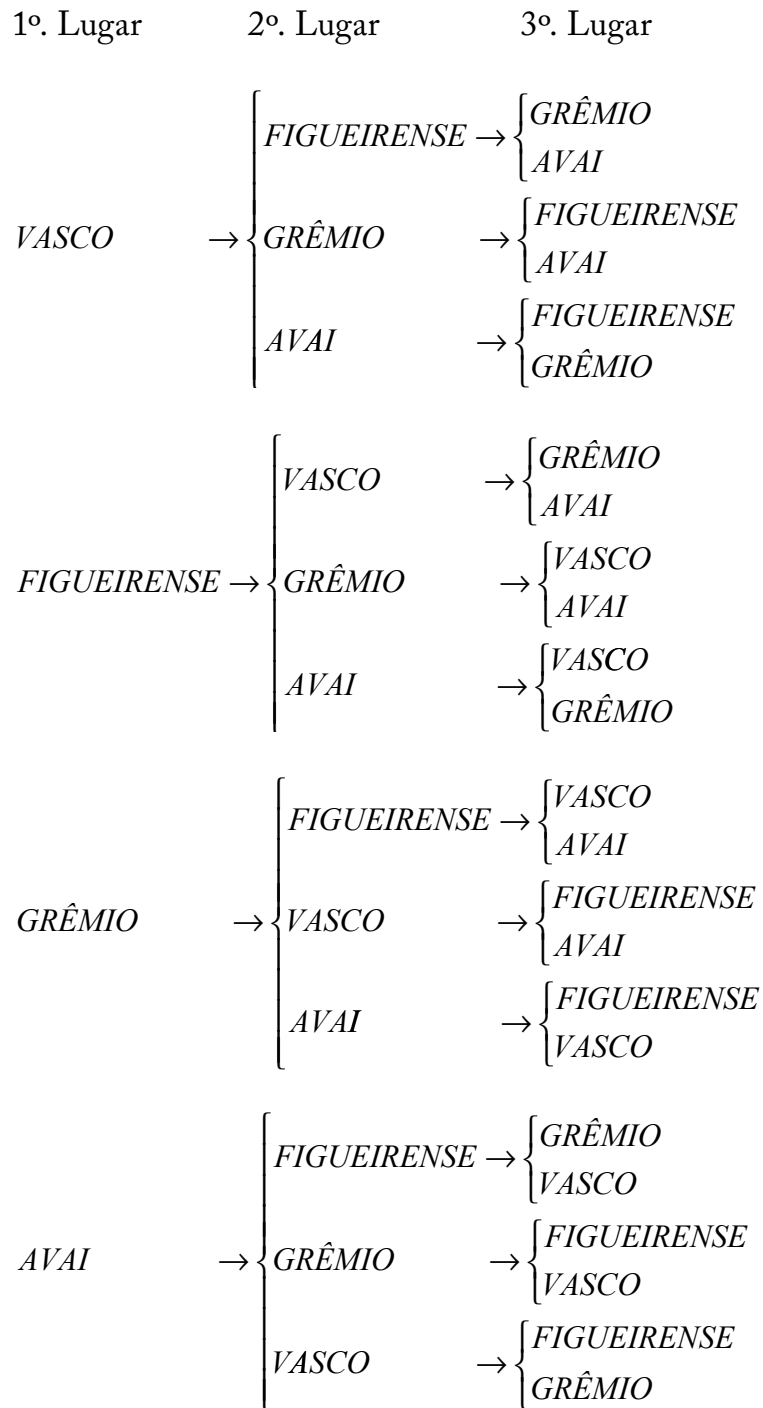
- p_1 é o número de possibilidades da primeira etapa;
- p_2 é o número de possibilidades da segunda etapa;
-
-
- p_n é o número de possibilidades da n-ésima etapa.

Então: $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$ é o número total de possibilidades de ocorrência do acontecimento.

EXEMPLOS:

(1) Quatro times de futebol (Vasco, Grêmio, Figueirense, Avaí) disputam um torneio. Quantas e quais são as possibilidades de classificação para os três primeiros lugares?

Solução: Observe a árvore de possibilidades:.



Assim tem-se:

- 4 possibilidades para a primeira etapa;
- 3 possibilidades para a segunda etapa;
- 2 possibilidades para a terceira etapa.

Logo, pelo princípio fundamental da contagem, tem-se:
 $4 \times 3 \times 2 = 24$ possibilidades de classificação.

(2) Os números de telefones de Santa Catarina de código 48 têm 8 dígitos. Determine o número máximo de telefones que podem ser instalados para o código 48 sabendo-se que os números não podem começar com zero?

Solução:

Não vamos montar a árvore de possibilidades, pois será um imenso trabalho. Basta aplicar o princípio fundamental da contagem. Tem-se:

- 9 algarismos disponíveis para o primeiro dígito;
- 10 para o segundo;
- 10 para o terceiro;
- 10 para o quarto;
- 10 para o quinto;
- 10 para o sexto;
- 10 para o sétimo;
- 10 para o último dígito;

Assim, tem-se: $9 \times 10^7 = 90\,000\,000$ números disponíveis para telefones.



Pare! Observe!

Veja que na primeira etapa – colocação do primeiro dígito – foi considerado somente 9 dígitos, pois está condicionada a não existência do zero nesta posição.

(3) Uma fábrica de móveis tem 10 modelos de mesas e 4 modelos de cadeiras. Quantos modelos para a venda do jogo de mesas e cadeiras a fábrica pode oferecer aos seus clientes?

Solução:

Podemos usar o princípio fundamental da contagem, fazendo as seguintes etapas:

- Escolha da mesa – 10 opções;
- Escolha da cadeira – 4 opções.

Assim, temos: $10 \times 4 = 40$ modelos de jogos de mesas e cadeiras.

(4) De quantos modos cinco pessoas podem sentar-se em um carro com cinco lugares:

- indistintamente?
- quando somente um deles dirige?

Solução:

Usando o princípio fundamental da contagem, na situação nem todos sabem dirigir:

- para a primeira pessoa a sentar no carro tem-se 5 opções;
- para a segunda tem-se 4 opções;
- para a terceira tem-se 3 opções;
- para a quarta tem-se 2 opções;
- para a quinta tem-se 1 opção.

Assim temos: $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ modos.

Quando somente uma pessoa dirige, vamos ter somente que alocar quatro pessoas em quatro lugares:

- para a primeira pessoa a sentar no carro tem-se 4 opções;
- para a segunda tem-se 3 opções;
- para a terceira tem-se 2 opções;
- para a quarta tem-se 1 opções;

Assim temos: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ modos.

Você já deve ter percebido que o uso do princípio fundamental da contagem tem restrições de uso, pois podemos ter a situação em que as etapas sucessivas são identificadas, mas elas não são independentes. Nestes casos é importante usar novas técnicas de contagens a partir da identificação da formação dos agrupamentos. A nova técnica consiste, inicialmente, na identificação de Arranjos, Combinações ou Permutações e, posteriormente, fazer cálculos com fórmulas previamente definidas para cada situação específica.

SEÇÃO 3 - Introduzindo fórmulas para a resolução de problemas

Não vamos fazer dedução formal de fórmulas, vamos simplesmente introduzir um raciocínio que conduzirá para a visualização das fórmulas.

Veja os quadros que seguem mostrando a quantidade de números com p algarismos distintos que se pode formar com n algarismos distintos (obs.: n e p são números inteiros e $p \leq n$). Observe na primeira linha do quadro os valores para n e p ; na segunda linha o conjunto de agrupamentos e, na última linha, a formalização da contagem. No quadro 1.1 temos a formação usando 3 dígitos e no quadro 1.2 usando-se 4 dígitos (para facilitar o raciocínio não vamos usar o dígito zero).

Quadro 1.1 - Arranjos simples de 3 elementos p a p com p variando de 1 a 3

$n=3$ e $p=1$	$n=3$ e $p=2$	$n=3$ e $p=3$
1 2 3	31 32 13 12 23 21	312 321 132 123 231 213
3 $A_{3,1} = 3$	$3 \times 2 = 6$ $A_{3,2} = 6$	$3 \times 2 \times 1 = 6$ $A_{3,3} = P_3 = 6$

Quadro 1.2 - Arranjos simples de 4 elementos p a p com p variando de 1 a 4

n=4 e p=1	n=4 e p=2	n=4 e p=3	n=4 e p=4
1		123 213 312 412	1234 2134 3124 4123
2	12 21 31 41	124 214 314 413	1243 2143 3142 4132
3	13 23 32 42	132 231 321 421	1324 2314 3214 4213
4	14 24 34 43	134 234 324 423	1342 2341 3241 4231
		142 241 341 431	1423 2413 3412 4312
		143 243 342 432	1432 2431 3421 4321
4	$4 \times 3 = 12$ $A_{4,2} = 12$	$4 \times 3 \times 2 = 24$ $A_{4,3} = 24$	$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ $A_{4,4} = P_4 = 24$

Você pode fazer outras tabelas e poderá observar que temos a possibilidade de fazer uma generalização, montando uma fórmula para calcular Arranjos **de n elementos p a p**.



Arranjos de n elementos p a p

$$A_{n,p} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$$

Você poderá constatar que o produto sempre terá p fatores e quando $n=p$ você terá permutações simples. Os exemplos que seguem mostram a aplicação da fórmula dada.

Exemplo:

Quantos números de 5 algarismos distintos podem ser formados com os algarismos do sistema decimal sem os repetir, de modo que:

- (a) comecem por 2;
- (b) comecem por 3 e terminem por 5.

Solução:

Item (a)	Item (b)
<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</div> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></div> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></div> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></div> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></div> </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</div> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></div> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></div> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">5</div> </div>
$A_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$	$A_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

É importante lembrar que, quando temos os Arranjos com $n = p$, usamos a denotação de Permutações. Assim, podemos estabelecer a fórmula para o cálculo das permutações simples.



Permutações simples com n elementos

$$A_{n,n} = P_n = n(n-1)(n-2)\dots 1.$$

Estamos diante de n fatores que, ao serem escritos em ordem decrescente, têm como último fator, o número 1.

Para facilitar a notação você poderá escrever:

$$A_{n,n} = P_n = n!.$$

Observe que o ponto de exclamação está indicando a multiplicação da definição de Arranjos Simples de n elementos n a n ou Permutação Simples de n elementos. Costuma-se falar **n fatorial** para o símbolo **$n!$**

EXEMPLOS:

(1) Quantos anagramas têm a palavra LIVRO?

Solução:

$$A_{5,5} = 5.4.3.2.1 = 120 \text{ anagramas.}$$

(2) Quantos anagramas têm a palavra vestibular que:

(a) começam por A?

(b) começam por A e terminam por E?

Solução:

Item (a)

A

$$A_{9,9} = P_9 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362.880 \text{ anagramas.}$$

Item (b)

A E

$$A_{8,8} = P_8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40.320 \text{ anagramas.}$$

Veja agora o estabelecimento de uma fórmula para calcular Combinações simples. Observe os quadros 1.3 e 1.4 considerando que o objetivo é encontrar a quantidade de equipes com p alunos que podem ser formadas com n alunos de uma classe.

Quadro 1.3 - Combinações de 3 elementos p a p, com p variando de 1 a 3

n=3 (Alunos A, B e C)		
p=1	p=2	p=3
A B C	AB AC BC	ABC
$C_{3,1} = \frac{3}{1} = 3$	$C_{3,2} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 3$	$C_{3,3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1$

Quadro 1.4 - Combinações de 4 elementos p a p, com p variando de 1 a 4

n=4 (Alunos A, B, C e D)			
p=1	p=2	p=3	p=4
A B C D	AB AC AD BC BD CD	ABC ABD ACD BCD	ABCD
$C_{4,1} = \frac{4}{1} = 4$	$C_{4,2} = \frac{4.3}{2.1} = 6$	$C_{4,3} = \frac{4.3.2}{3.2.1} = 4$	$C_{4,4} = \frac{4.3.2.1}{4.3.2.1} = 1$

Observando as expressões pode-se escrever a fórmula geral para o Cálculo das Combinações simples.



Combinações simples de n elementos p a p

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$$



Pare! Observe!

Na Unidade 2 você vai constatar outras aplicações das combinações e também vai usar uma outra notação

$$C_{n,0} = \binom{n}{p}.$$

EXEMPLOS:

(1) Com 10 pessoas, quantas comissões constituídas de 5 pessoas podem ser formadas?

Solução:

Antes de aplicar a fórmula das combinações é importante lembrar que neste problema os agrupamentos são diferentes somente pela

natureza dos elementos, caracterizando, portanto, um processo de combinações. Temos:

$$C_{10,5} = \frac{A_{10,5}}{5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{30.240}{120} = 252$$

comissões.

(2) Quantos subconjuntos de $A=\{a,b,c,d\}$ são formados com 2 elementos?



Pare! Revise!

Você deve lembrar da Teoria dos Conjuntos que a troca de ordem dos elementos de um conjunto não caracteriza um novo conjunto. Por exemplo,

$$\{1, 2\} = \{2, 1\}.$$

Solução: Esta é outra situação típica da aplicação das combinações, pois os elementos são diferentes somente pela natureza de seus elementos. Temos:

$$C_{4,2} = \frac{A_{4,2}}{2!} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{12}{2} = 6 \text{ subconjuntos.}$$

SEÇÃO 4 - Uso do fatorial

Já verificamos na seção anterior que podemos utilizar a ferramenta matemática denotada por fatorial para facilitar as notações no contexto da Análise Combinatória. Nesta seção vamos detalhar um pouco mais o algebrismo dessa ferramenta.



Definição: Sendo n um número inteiro, maior que um, define-se fatorial de n e indica-se $n!$, a expressão

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1.$$

Especificamente, define-se:

$$0! = 1$$

$$1! = 1.$$



Pare! Observe!

No ensino médio é usual alguns professores ficarem “perdidos” quando um aluno estranha o fato de que $0! = 1! = 1$. Estando diante de uma definição não se tem a necessidade de demonstrar. Entretanto, é importante visualizar o enquadramento desta definição no contexto das propriedades do fatorial. Uma definição mais formal, do ponto de vista matemático, pode ser dada usando matemática mais avançada. Veja considerações adicionais no seu material on-line, no EVA.

Valem as propriedades:

- $n! = n(n-1)!$
- $n! = n(n-1)(n-2)!$
- etc.

As fórmulas da análise combinatória podem ser expressas com o uso do fatorial.



Fórmulas da análise combinatória gerais:

- Arranjos Simples

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

- Permutações Simples

$$P_n = n!$$

- Combinações Simples

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

EXEMPLOS GERAIS:

(1) Calcular as expressões:

- $\frac{5!}{2!+5!}$
- $\frac{12!}{10!} + 4$

Solução: Na solução procuramos sempre aplicar as propriedades para facilitar o cálculo. Temos:

$$\frac{5!}{2!+5!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!+5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!(1+60)} = \frac{60}{61}$$

$$\frac{12!}{10!} + 4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!} + 4 = 12 \cdot 11 + 4 = 132 + 4 = 136$$

(2) Simplifique as expressões:

- $\frac{(n+2)!}{(n+1)!}$

$$\blacksquare \frac{n! - (n+1)!}{n!}$$

Solução:

Novamente, vamos usar as propriedades para simplificar as expressões:

$$\blacksquare \frac{(n+2)!}{(n+1)!} = \frac{(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} = n+2.$$

$$\blacksquare \frac{n! - (n+1)!}{n!} = \frac{n! - (n+1)n!}{n!} = \frac{n![1 - (n+1)]}{n!} = 1 - n - 1 = -n.$$

3) Resolva a equação $(n-4)! = 120$.

Solução:

Para resolver esta equação podemos estabelecer a relação $120 = 5!$
Assim,

$$(n-4)! = 120$$

$$(n-4)! = 5!$$

$$n-4 = 5$$

$$n = 9$$

(4) Num hospital existem 3 portas de entrada que dão para um amplo saguão no qual existem 5 elevadores. Um visitante deve se dirigir ao sexto andar, utilizando-se de um dos elevadores. De quantas maneiras poderá fazê-lo?

Solução:

Este problema pode ser resolvido pelo princípio fundamental da contagem. Tem-se:

- Escolha da porta de entrada – 3 opções;
- Escolha do elevador – 5 elevadores.

Assim, tem-se: $3 \times 5 = 15$ maneiras.

(5) Com os algarismos 2,3,4,5,6,7 e 8, quantos números de 4 algarismos, sem os repetir, podemos formar?

Solução:

Antes de resolver um problema procure sempre identificar alguns agrupamentos para identificar se a situação é típica de Arranjos ou Combinações.

Neste exemplo, os agrupamentos são diferentes pela ordem e pela natureza, portanto estamos diante de Arranjos. Para o cálculo de Arranjos de sete elementos agrupados quatro a quatro, podemos usar uma das duas fórmulas dadas:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ ou } A_{n,p} = n(n-1)\cdots(n-p+1).$$

Assim,

$$A_{7,4} = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840 \text{ números.}$$

(6) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos do sistema decimal, sem os repetir, de modo que:

- comecem por 1;
- comecem por 2 e terminem por 5.

Solução:

Estamos diante de Arranjos. Se quisermos que os números comecem por 1, vamos ter os nove algarismos restantes do sistema decimal para agrupar dois a dois.

$$A_{9,2} = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9!}{7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 9 \cdot 8 = 72 \text{ números.}$$

Se quisermos que os números comecem por 2 e terminem por 5, vamos ter os oito algarismos restantes do sistema decimal para agrupar um a um.

$$A_{8,1} = \frac{8!}{(8-1)!} = \frac{8!}{7!} = \frac{8 \cdot 7!}{7!} = 8 \text{ números.}$$

(7) Com os algarismos 0,1,2,4 e 5, sem os repetir, quantos números compreendidos entre 200 e 1000 podemos formar?

Solução:

Analisando a situação temos a certeza de que os agrupamentos são Arranjos, mas, neste caso, temos uma restrição de que os números devem estar entre 200 e 1000. Com os algarismos dados é fácil concluir que esses números deverão iniciar com 2, 4 ou 5. Assim, temos:

- Números que iniciam com 2: $A_{4,2} = 4.3 = 12$;
- Números que iniciam com 4: $A_{4,2} = 4.3 = 12$;
- Números que iniciam com 5: $A_{4,2} = 4.3 = 12$.
- A resposta final é dada por $3A_{4,2} = 36$ números.

(8) Quantos números pares de 4 algarismos, sem os repetir, podemos formar com os algarismos 0,1,2,3,4,5 e 6? (Observe que não devemos considerar números que iniciam com zero, pois, neste caso, eles serão considerados com apenas 3 algarismos, por exemplo, 0123=123).

Solução: Lembre que os agrupamentos nas condições do problema, para serem pares, deverão terminar com 0, 2, 4 ou 6. Assim, temos:

- Agrupamentos que terminam com zero - $A_{6,3}$. Temos seis dígitos para ocuparem três posições na formação do número;
- Agrupamentos que terminam com dois - $A_{6,3} - A_{5,2}$. Temos que subtrair os números que iniciam com zero e terminam com dois.
- Agrupamentos que terminam com quatro - $A_{6,3} - A_{5,2}$. Temos que subtrair os números que iniciam com zero e terminam com quatro.
- Agrupamentos que terminam com seis - $A_{6,3} - A_{5,2}$. Temos que subtrair os números que iniciam com zero e terminam com seis.

A resposta final é dada por: $A_{6,3} + 3(A_{6,3} - A_{5,2}) = 420$ números.

(9) Quantos anagramas de 3 letras, sem repetição, podemos formar com as 9 primeiras letras do nosso alfabeto?

Solução:

Estamos diante de Arranjos de 9 elementos para serem agrupados 3 a 3. Temos:

$$A_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504 \text{ anagramas.}$$

(10) Numa sala, temos 5 rapazes e 6 moças. Quantos grupos podemos formar, tendo 2 rapazes e 3 moças?

Solução:

Podemos usar o princípio fundamental da contagem associado com o uso das fórmulas. Veja:

- Na primeira opção, vamos estabelecer o número de rapazes: $C_{5,2}$. Estamos diante de combinações, pois a diferença entre os agrupamentos será feita somente pela natureza dos seus elementos. Temos 5 rapazes para serem escolhidos dois a dois.
- Na segunda opção, vamos estabelecer o número de moças: $C_{6,3}$. Temos 6 moças para serem escolhidas três a três.

Assim, a resposta final é dada por:

$$C_{5,2} \times C_{6,3} = \frac{5!}{2!(5-2)!} \times \frac{6!}{3!(6-3)!} = 10 \times 20 = 200 \text{ grupos.}$$

(11) Sobre uma reta, marcam-se 8 pontos e sobre uma outra reta paralela à primeira, marcam-se 5 pontos. Quantos triângulos você obterá unindo 3 quaisquer desses pontos?

Solução:

Para entender este problema é importante lembrar que não podemos unir 3 pontos que estão sobre a mesma reta, pois, neste caso, não vamos formar um triângulo. A Figura 1.9 mostra exemplos de agrupamentos para que seja observado que estamos diante de combinações, pois os triângulos se diferem somente

quando usamos pontos diferentes, não basta trocar a ordem dos pontos.

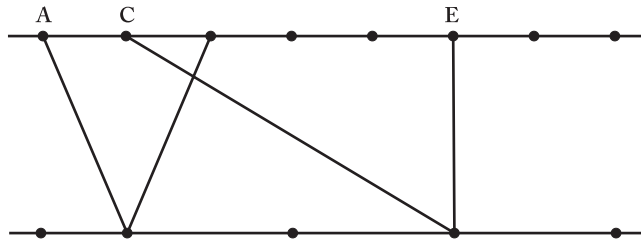


Figura 1.9

Assim, do número de combinações total, vamos precisar subtrair as combinações dos conjuntos de pontos sobre cada uma das retas. Temos,

$$C_{13,3} - C_{8,3} - C_{5,3} = 286 - 56 - 10 = 220 \text{ triângulos.}$$



Olhando o futuro!

Você poderá encontrar na Internet um programa para calcular Arranjos, Permutações e Combinações Simples.

Veja:

<http://www.adisoribeiro.com.br/Combina.htm>

SEÇÃO 5 - Agrupamentos com repetição de elementos

Nas seções anteriores os agrupamentos formados não tinham a repetição de elementos. No decorrer desta seção vamos analisar os agrupamentos com repetição de elementos. As concepções de formação de Arranjos, Permutações e Combinações relativas a ordem ou natureza dos elementos continuam válidas, mas as fórmulas a serem usadas serão diferentes.



Olhando o presente!

Veja as seguintes situações problemas:

P1: Quantos são os anagramas da palavra CASA?

P2: Quantos são os anagramas da palavra OSSO?

P3: Tenho 3 caixas de fósforos vazias (caixa com um único espaço). De quantos modos posso guardar 4 palitos de fósforos nessas caixas?

P4: A figura 1.10 representa quarteirões de ruas, com a localização de um colégio e uma praça. Quantos percursos distintos de 5 quarteirões existem entre o colégio e a praça?

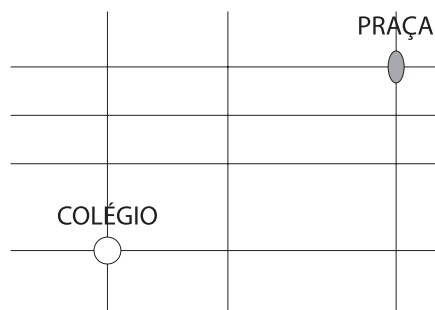


Figura 1.10

P5: Encontrar quantos números de dois algarismos podem ser formados usando 2,3,4 e 5?

P6: Usando os algarismos 1,2,3,4,5,6 e as letras A,B,C,D,E, quantos veículos podemos emplacar, usando:

- (a) 2 letras e 4 algarismos;
- (b) 3 letras e 4 algarismos;
- (c) 2 letras distintas e 4 algarismos?

P7: Quantos agrupamentos usamos para confeccionar um dominó, usando os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

Inicialmente, vamos fazer uma análise desses problemas sem resolvê-los.



São situações que envolvem Arranjos, Permutações ou Combinações? Os agrupamentos podem ter elementos repetidos?

Refleta e observe as considerações no quadro de análise que segue.

Problema	Exemplos de agrupamentos	Tipo
P1	CASA SAAC CAAS etc.	Permutação de 4 elementos sendo que um deles se repete duas vezes.
P2	OSSO SS00 SOS0	Permutação de 4 elementos sendo que dois deles se repetem duas vezes.
P3	Vai ser necessário fazer uma codificação para representar agrupamentos	Vamos identificar como permutação com repetição.
P4	Idem ao P3	Idem ao P3
P5	22 24 42 44 etc.	Arranjos com repetição
P6	Item (a) AA1234 AB1234 AA1111	Arranjos com repetição
P7	$(0-0)$ $(0-1)$ $(1-0)$ $(0-2)$ etc.	Combinações com repetição

Para desenvolver os problemas vamos precisar das fórmulas. Com interpretações similares ao usado para as fórmulas simples podemos fazer as devidas generalizações. No seu material on-line, considerações adicionais serão estabelecidas para ampliar um pouco mais as idéias aqui iniciadas.



Fórmulas da análise combinatória para agrupamentos com repetição

- Arranjos com repetição

$$(AR)_{n,p} = n^p$$

- Permutações com repetição

$$P_n^{\alpha!\beta!\dots\gamma!} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\dots\gamma!} \text{ sendo } \alpha, \beta, \dots, \gamma \text{ o número de}$$

repetições de cada elemento.

- Combinações com repetição

$$(CR)_{n,p} = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+p-1)}{p!}$$

Agora a resolução dos problemas pode ser finalizada.

Solução dos problemas:

P1: Quantos são os anagramas da palavra CASA?

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 12 \text{ anagramas.}$$

P2: Quantos são os anagramas da palavra OSSO?

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!2!} = \frac{12}{2} = 6 \text{ anagramas.}$$

P3: Tenho 3 caixas de fósforos vazias (caixa com um único espaço). De quantos modos posso guardar 4 palitos de fósforos nessas caixas?

Para resolver este problema vamos usar uma representação que facilitará a identificação de agrupamentos do tipo de permutações. Observe a Figura 1.11, veja a marcação das caixas com traços e as pontas dos palitos de fósforos representadas por círculos. A figura mostra que na caixa 1 colocamos 1 fósforo, na caixa 2 colocamos 2 fósforos e na caixa 3 colocamos 1 fósforo.



Figura 1.11

Um outro exemplo de agrupamento que aparece na Figura 1.12 mostra dois fósforos na caixa 1, a caixa 2 está vazia e a caixa 3 com dois fósforos.



Figura 1.12

Com esta notação podemos considerar que estamos diante de permutações com 6 elementos sendo que um deles se repete 4 vezes (fósforos) e o outro se repete 2 vezes (separação das caixas).

Assim,

$$P_6^{4,2} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!2!} = \frac{30}{2} = 15 \text{ modos.}$$

P4: A figura 1.13 representa quarteirões de ruas, com a localização de um colégio e uma praça. Quantos percursos distintos de 5 quarteirões existem entre o colégio e a praça?

Vamos observar que o deslocamento do colégio para a praça deverá ser feito para norte (N) e para leste (L). Assim o roteiro apresentado na Figura 1.13 poderá ser denotado por LNNNL, ou seja, uma quadra para leste, 3 quadras para norte e uma quadra para leste.

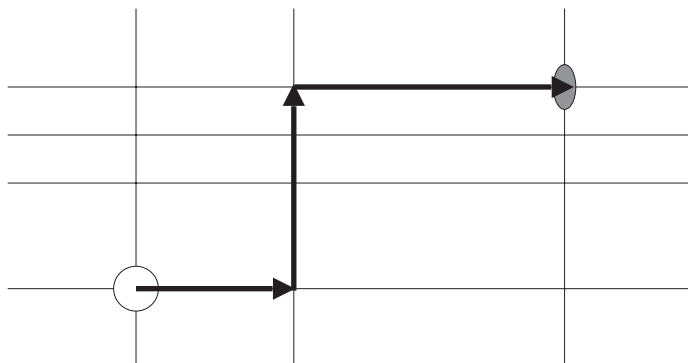


Figura 1.13

Fica assim identificada a Permutação de 5 elementos sendo que temos a repetição de 3 N (roteiro para o norte) e 2 L (roteiro para o leste).

Portanto, a solução é dada por:

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2!} = \frac{20}{2} = 10 \text{ percursos.}$$

P5: Encontrar quantos números de dois algarismos podem ser formados usando 2,3,4 e 5?

Neste problema já identificamos a situação de arranjos com repetição. Assim,

$$(AR)_{4,2} = 4^2 = 16 \text{ números.}$$

P6: Usando os algarismos 1,2,3,4,5,6 e as letras A,B,C,D,E, quantos veículos podemos emplacar, usando:

- (a) 2 letras e 4 algarismos;
- (b) 3 letras e 4 algarismos;
- (c) 2 letras distintas e 4 algarismos?

Neste caso, a situação é de arranjos com repetição, associada ao princípio fundamental da contagem. Temos:

- (a) 2 letras e 4 algarismos

- Escolha das letras: $(AR)_{5,2}$;
- Escolha dos números: $(AR)_{6,4}$.

Assim, a resposta final é

$$(AR)_{5,2} \times (AR)_{6,4} = 5^2 \times 6^4 = 25 \times 1296 = 32.400 \text{ números.}$$

(b) 3 letras e 4 algarismos

- Escolha das letras: $(AR)_{5,3}$;
- Escolha dos números: $(AR)_{6,4}$.

Assim, a resposta final é

$$(AR)_{5,3} \times (AR)_{6,4} = 5^3 \times 6^4 = 125 \times 1296 = 162.000 \text{ números.}$$

(c) 2 letras distintas e 4 algarismos

- Escolha das letras – Observe que agora as letras são distintas e portanto os arranjos são simples: $A_{5,2}$;
- Escolha dos números: $(AR)_{6,4}$.

Assim, a resposta final é

$$A_{5,2} \times (AR)_{6,4} = 5 \cdot 4 \times 6^4 = 20 \times 1296 = 25.920 \text{ números.}$$

P7: Quantos agrupamentos usamos para confeccionar um dominó, usando os algarismos 0,1 ,2,3,4,5 e 6?

$$(CR)_{7,2} = \frac{7 \cdot 6}{2!} = \frac{42}{2} = 21 \text{ agrupamentos.}$$



Parada Recreativa!

Olá!

Agora que você já sabe calcular a quantidade de peças de um dominó, procure fazer conjecturas para a resposta da seguinte pergunta:

Por que um dominó formal tem 28 peças? Por que o dominó não vai até o número 5, 7 ou 8?



Síntese

Nesta Unidade você teve a oportunidade de refletir sobre os conteúdos da Análise Combinatória. Este conteúdo é obrigatório no ensino médio e em geral exige muito a habilidade de raciocínio e de aplicação de fórmulas. Dois pontos são considerados importantes para o sucesso da resolução de problemas que não estão explicitamente caracterizados como aplicação de arranjos, permutações ou combinações: a identificação de uma representação dos agrupamentos e a análise que os diferencia. O aluno que desenvolve habilidades para estabelecer esses dois pontos, fica motivado para resolver diversas situações problemas do dia-a-dia, recreativas ou simuladas.



Atividades de auto-avaliação

(1) No Brasil, antes da alteração do sistema de emplacamento de automóveis, as placas dos veículos eram confeccionadas usando-se 2 letras do alfabeto e 4 algarismos. Qual o número máximo de veículos que poderiam ser licenciados neste sistema?

(2) Calcule o número de formas distintas de 5 pessoas ocuparem os lugares de um banco retangular de cinco lugares.

(3) Calcule o número de anagramas da palavra MUNDIAL.

(4) Determine o número de anagramas da palavra MATEMÁTICA. (Não considere o acento)

(5) Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra ARARA?

(6) Uma prova consta de 12 questões, das quais o aluno deve resolver 10. De quantas formas ele poderá escolher as 10 questões?

(7) Quantos números com cinco algarismos podemos construir com os números ímpares 1,3,5,7,9, desde que estejam sempre juntos os algarismos 1 e 3.

(8) Quantos são os anagramas possíveis com as letras: ABCDEF, começando por A?

(9) Quantos são os anagramas possíveis com as letras: ABCDEFGHI, começando por AB?

(10) Quantos são os anagramas possíveis com as letras: ABCDEFGHI, começando por uma vogal e terminando por uma consoante?

(11) Há 10 pessoas em um desfile, sendo 3 com camisas verdes, 3 com camisas amarelas, 2 com camisas azuis e 2 com camisas brancas. De quantos modos podemos perfilar todas essas 10 pessoas de modo que os grupos com as camisas de mesma cor fiquem juntos?

(12) Quantos grupos de 3 pessoas podem ser formados com 8 pessoas?

(13) Em uma sala existem 40 pessoas, 18 mulheres e 22 homens. Quantas comissões podem ser montadas nesta sala contendo 3 mulheres e 5 homens?

(14) Resolver a equação $3 C_{x+1,3} = 2 C_{x+2,2}$.

(15) Quantos números com 4 algarismos podemos formar com os algarismos: 0,1,2,3,4,5,6,7,8 e 9.



Saiba mais

Se você está interessado em aprofundar seu estudo de análise combinatória procure os livros do ensino médio, pois lá você poderá encontrar vários problemas para serem investigados. Investigue também sites na Internet, mas cuidado, pois existem sites com problemas com soluções equivocadas. Não esqueça também que no seu material on-line estão disponíveis considerações diversas sobre o tema desta disciplina.

UNIDADE 2

Binômio de Newton

2



Objetivos de aprendizagem

- Identificar os procedimentos utilizados na expansão do binômio de Newton.
- Conhecer o triângulo de Pascal, suas propriedades e relações com o binômio de Newton.
- Analisar e refletir sobre o uso de diferentes ferramentas didáticas no ensino do binômio de Newton.



Seções de estudo

Seção 1 Introdução

Seção 2 Teorema Binomial

Seção 3 O triângulo de Pascal



Para início de conversa

O conteúdo que você estudará neste unidade está presente em praticamente todos os livros de Ensino Médio e constitui uma ferramenta importante que conecta conceitos da análise combinatória com a álgebra.

Há educadores matemáticos que questionam a ênfase que este conteúdo tem no ensino médio, no entanto, não se tem dúvida de sua importância no que diz respeito ao desenvolvimento de técnicas importantes no contexto da álgebra.

Você conhecerá também o triângulo de Pascal e poderá viajar no tempo para entender um pouco de sua história.

Está curioso? Então, vamos em frente!



SEÇÃO 1 - Introdução

Após ter estudado na unidade 1 os conceitos gerais da análise combinatória, nesta unidade você perceberá que é possível utilizar este conteúdo para uma generalização importante no contexto da álgebra.



Você já se deparou com a necessidade de resolver expressões do tipo $(x+a)^n$, sendo $n \in \mathbb{N}$ e $x, a \in \mathbb{R}$?

Então, as situações que serão apresentadas a seguir, já serão conhecidas. Acompanhe:

$$(x+a)^0 = 1$$

$$(x+a)^1 = x+a$$

$$(x+a)^2 = (x+a)(x+a) = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x+a)^3 = (x+a)(x+a)(x+a) = (x^2 + 2ax + a^2)(x+a) = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

$$(x+a)^4 = (x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3)(x+a) = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$



Pare! Revise!

A expressão $(x+a)^2$ também é conhecida como um quadrado perfeito.

Assim, é possível escrever: $(x+a)^n = \underbrace{(x+a)(x+a)\dots(x+a)}_{n \text{ fatores}}$

Ou ainda: $(x+a)^n = (x+a)(x+a)^{n-1}$

Os cálculos desenvolvidos não são difíceis, mas é extremamente trabalhoso realizar o desenvolvimento de expressões com valores de n maiores que 4.

Contudo, não se preocupe, vamos agora visualizar conceitos e ferramentas que permitirão o desenvolvimento de $(x + a)^n$ de forma menos trabalhosa.



Para isso, que tal conhecer o diagrama de árvore?

Para desenvolver expressões do tipo $(x + a)^n$, podemos utilizar um diagrama de árvore para selecionar os termos que irão compor um somatório final. Acompanhe o exemplo a seguir.

Exemplo:

Desenvolver a expressão $(x + a)^2$ usando o diagrama de árvore.

Na Figura 2.1, você pode visualizar o diagrama de árvore para esta situação.

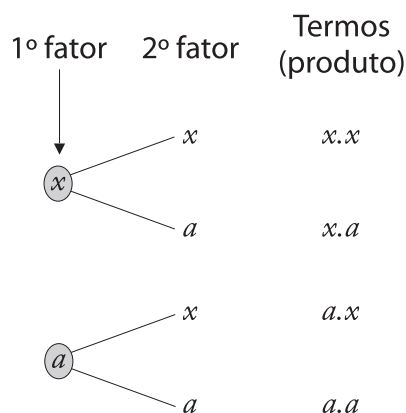


Figura 2.1: Diagrama de árvore para $(x + a)^2$

O resultado será dado pela soma dos termos encontrados, ou seja,

$$(x + a)^2 = x.x + x.a + a.x + a.a .$$

Reduzindo os termos semelhantes, $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$.

Mesmo ao utilizar esta forma esquemática, um pouco mais simplificada, ainda é trabalhoso o desenvolvimento de $(x+a)^n$ com valores de n muito altos. Na próxima seção você conhecerá outra forma de desenvolver esta expressão sem precisar usar o diagrama de árvore.

SEÇÃO 2 - Teorema Binomial

Após buscarmos alternativas para o desenvolvimento de expressões do tipo $(x+a)^n$, especialmente quando se tem valores de n muito altos, chegou o momento de definirmos o teorema binomial, que será importante para um desenvolvimento mais sistematizado e até simplificado.

Mas antes de enunciar o teorema, acompanhe o exemplo para que consiga melhor entendê-lo.

Exemplo:

Desenvolva a expressão $(x+a)^3$ a partir da análise dos termos de cada fator.

Neste caso, teremos três termos que devem ser multiplicados entre si, ou seja, $(x+a)^3 = (x+a)(x+a)(x+a)$.

Os tipos de produtos que serão obtidos são: x^3, ax^2, a^2x, a^3 . Vamos então analisar quais serão os coeficientes de cada um destes produtos que aparecem na resolução desta expressão. Acompanhe:

- Termo x^3 :
Temos apenas um termo x^3 , obtido a partir da multiplicação dos termos x de cada fator. Assim, o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de $(x+a)^3$ é igual a

$$1, \text{ ou seja, } \binom{3}{0}.$$



Pare! Revise!

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

- Termo ax^2 :
Para a obtenção deste termo, é necessário multiplicar dois x e um a . Podemos então escrever:

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!2!} = 3$$



Pare! Observe!

$$\frac{3!}{1!2!} = \frac{3 \cdot 2!}{1 \cdot 2!} = 3$$

Assim, o coeficiente de ax^2 no desenvolvimento de $(x+a)^3$ é igual a 3, ou seja, $\binom{3}{1}$.

- Termo a^2x :
Para a obtenção deste termo, é necessário multiplicar dois a e um x . Podemos então escrever:

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$$



Pare! Observe!

$$\frac{3!}{2!1!} = \frac{3 \cdot 2!}{2! \cdot 1} = 3$$

Assim, o coeficiente de a^2x no desenvolvimento de $(x+a)^3$ é igual a 3, ou seja, $\binom{3}{2}$.

■ Termo a^3 :

Temos apenas um termo a^3 , obtido a partir da multiplicação dos termos a de cada fator. Assim,

$$\binom{3}{3} = \frac{3!}{3!0!} = 1$$



Pare! Revise!

$$0! = 1$$

Assim, o coeficiente de a^3 no desenvolvimento de $(x+a)^3$ é igual a 1, ou seja, $\binom{3}{3}$.

As observações podem ser sistematizadas da seguinte forma:

$$(x+a)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}ax^2 + \binom{3}{2}a^2x + \binom{3}{3}a^3$$

Perceba que no exemplo apresentado, fizemos a análise de uma situação específica em que $n=3$. Agora é o momento de generalizar os resultados obtidos a partir da apresentação do teorema binomial.



Olhando o passado!

O teorema binomial é frequentemente atribuído à Newton e, desta forma, também é conhecido como Teorema de Newton. Vale destacar que Newton desenvolveu uma técnica interessante para o cálculo de $(x+a)^n$ e, sendo assim, a expansão de $(x+a)^n$ é comumente chamada de **Binômio de Newton**.



Teorema Binomial

O desenvolvimento de $(x+a)^n$, sendo $n \in \mathbb{N}$ e $x, a \in \mathbb{R}$ é dado por:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0} \cdot a^0 \cdot x^n + \binom{n}{1} \cdot a^1 \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot a^2 \cdot x^{n-2} + \dots + \binom{n}{p} \cdot a^p \cdot x^{n-p} + \dots + \binom{n}{n} \cdot a^n$$

Se você analisar o exemplo apresentado anteriormente, terá uma idéia de como é possível demonstrar este importante teorema. Acompanhe os exemplos e perceba como o desenvolvimento de $(x+a)^n$ se torna bem mais simples com o uso do teorema binomial.

Exemplos:

(1) Desenvolver $(x+2)^5$.

Neste caso, temos $a=2$ e $n=5$. Sendo assim, vamos substituir os valores na fórmula do teorema binomial:

$$\begin{aligned} (x+2)^5 &= \binom{5}{0} \cdot 2^0 \cdot x^5 + \binom{5}{1} \cdot 2^1 \cdot x^4 + \binom{5}{2} \cdot 2^2 \cdot x^3 + \binom{5}{3} \cdot 2^3 \cdot x^2 + \binom{5}{4} \cdot 2^4 \cdot x^1 + \binom{5}{5} \cdot 2^5 \cdot x^0 \\ &= 1 \cdot 1 \cdot x^5 + 5 \cdot 2 \cdot x^4 + 10 \cdot 4 \cdot x^3 + 10 \cdot 8 \cdot x^2 + 5 \cdot 16 \cdot x + 1 \cdot 32 \cdot 1 \\ &= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32 \end{aligned}$$

**Pare! Observe!**

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

(2) Desenvolver $(3y+1)^4$.

Neste caso, temos $x=3y$, $a=1$ e $n=4$. Assim, acompanhe o desenvolvimento usando o teorema binomial:

$$\begin{aligned} (3y+1)^4 &= \binom{4}{0} \cdot 1^0 \cdot (3y)^4 + \binom{4}{1} \cdot 1^1 \cdot (3y)^3 + \binom{4}{2} \cdot 1^2 \cdot (3y)^2 + \binom{4}{3} \cdot 1^3 \cdot (3y)^1 + \binom{4}{4} \cdot 1^4 \cdot (3y)^0 \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 81y^4 + 4 \cdot 1 \cdot 27y^3 + 6 \cdot 1 \cdot 9y^2 + 4 \cdot 1 \cdot 3y + 1 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 81y^4 + 108y^3 + 48y^2 + 12y + 1 \end{aligned}$$

**Olhando o futuro!**

Nem todos os softwares matemáticos conseguem apresentar o desenvolvimento algébrico de $(x+a)^n$. O Derive é bastante interessante neste sentido. Você pode utilizar sua versão demo, disponível em vários idiomas e com validade de 30 dias, no site <http://www.derive-europe.com>.

Use a barra inferior ou o comando Author – Expression para entrar com a expressão a ser desenvolvida, por exemplo, $(x+a)^{10}$.

Use o comando Simplificar-Expandir e verifique o resultado do desenvolvimento da expressão. Parece tão rápido!!!!



Você chegou a pensar que o binômio pode estar escrito como $(x - a)^n$? Será que o teorema ainda será válido?

A resposta é sim. Veja que podemos escrever $(x - a)^n$ fazendo $[x + (-a)]^n$. Desta forma, o teorema binomial também vale para estes tipos de expressões.

Ainda sobre o teorema binomial, vale destacar que os números

$\binom{n}{0}; \binom{n}{1}; \binom{n}{2}; \dots; \binom{n}{p}; \dots; \binom{n}{n}$ são chamados de **coeficientes**

binomiais.

No coeficiente binomial $\binom{n}{p}$, n é chamado de **numerador** e p é o **denominador**.

Podemos dizer que dois coeficientes binomiais de mesmo numerador são **complementares** se a soma de seus denominadores é igual ao seu numerador, ou seja,

$\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{q}$ são complementares se $p + q = n$.

Exemplos:

(1) $\binom{8}{2}$ e $\binom{8}{6}$ são binomiais complementares pois $2 + 6 = 8$.

(2) $\binom{15}{5}$ e $\binom{15}{10}$ são binomiais complementares pois $5 + 10 = 15$.

(3) $\binom{7}{5}$ e $\binom{3}{5}$ não são binomiais complementares pois não possuem o mesmo numerador.

Após a generalização no desenvolvimento de $(x+a)^n$ a partir do teorema binomial, podemos encontrar uma fórmula para o termo geral do binômio de Newton.



Fórmula do Termo Geral

O termo $\binom{n}{p} \cdot a^p \cdot x^{n-p}$ é dito geral pois ao

atribuirmos valores de p entre 0 e n , ou seja, $p = 0, 1, 2, \dots, n$, obtemos todos os termos do desenvolvimento do binômio de Newton.

Exemplo:

(1) Determinar o coeficiente de x^8 no desenvolvimento de $(x^2 + 1)^6$.

Para determinar o coeficiente solicitado, vamos encontrar o termo geral do desenvolvimento deste binômio:

$$\binom{6}{p} \cdot 1^p \cdot (x^2)^{6-p} = \binom{6}{p} \cdot (x)^{12-2p}$$

Para determinar o termo que possua x^8 , temos que igualar o valor do expoente de x do termo geral com o expoente de x^8 , que é o valor 8:

$$\begin{aligned} 12 - 2p &= 8 \\ -2p &= 8 - 12 \\ p &= 2 \end{aligned}$$

Agora basta substituir $p = 2$ no termo geral. Acompanhe:

$$\binom{6}{2} \cdot (x)^8 = \frac{6!}{2!4!} x^8 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 4!} x^8 = 15x^8$$

Assim, o coeficiente de x^8 é igual a 15.

O triângulo pode ser construído com o número de linhas que for necessário. Pode ainda ser escrito substituindo os coeficientes binomiais por seus valores, observe:

				1						
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1



Olhando o passado!

O triângulo de Pascal é uma denominação típica do Ocidente. A tabela de coeficientes binomiais tem uma antiga história ligada à China e aos árabes. A menção de que foi Pascal quem inventou o triângulo que deu o pontapé inicial para a Análise Combinatória não é verdadeira. Mesmo assim, vale destacar que este matemático contribuiu sobremaneira para a história da matemática, quando desde aos 14 anos já escrevia tratados sobre seções cônicas.



Mas qual a relação entre este triângulo e o binômio de Newton?

Agora é que você poderá visualizar uma utilização importante! Cada linha do triângulo contém os coeficientes do desenvolvimento do binômio de Newton $(x+a)^n$. Assim:

- na 1ª linha temos os coeficientes do desenvolvimento de $(x+a)^0$;
- na 2ª linha temos os coeficientes do desenvolvimento de $(x+a)^1$;
- na 3ª linha temos os coeficientes do desenvolvimento de $(x+a)^2$;

- na 4ª linha temos os coeficientes do desenvolvimento de $(x+a)^3$;
- e assim por diante.

Além de sistematizar o cálculo dos coeficientes do desenvolvimento do binômio de Newton, o triângulo de Pascal possui propriedades interessantes. Algumas não serão discutidas neste momento, pois não são utilizadas neste contexto. Veja as propriedades que auxiliam na montagem do triângulo:



Propriedade 1:

O primeiro elemento de cada linha é sempre igual a 1, isto porque no primeiro elemento teremos sempre o coeficiente binomial $\binom{n}{0}$.



Propriedade 2:

O último elemento de cada linha é sempre igual a 1, isto porque no último elemento teremos sempre o coeficiente binomial $\binom{n}{n}$.



Propriedade 3:

A partir da 2ª linha, cada elemento, exceto o primeiro e o último, é dado pela soma dos elementos imediatamente acima, localizados na linha anterior.

A propriedade 3 é conhecida como relação de Stifel e pode ser escrita da seguinte forma:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}, \quad n \geq 2$$

Veja esta propriedade ao observar parte do triângulo:

				1						
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

- O 2º elemento da 2ª linha é igual a soma dos elementos acima deste: $2=1+1$;
- O 2º elemento da 3ª linha é igual a soma dos elementos acima deste: $3=1+2$
- O 3º elemento da 3ª linha é igual a soma dos elementos acima deste: $3=2+1$
- O 3º elemento da 4ª linha é igual a soma dos elementos acima deste: $6=3+3$
- E assim sucessivamente...



Propriedade 4:

Em uma linha, os coeficientes binomiais equidistantes dos extremos serão sempre iguais. Isto significa que:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$



Olhando o passado!

Como eu já havia comentado, ao observar a história deste triângulo aritmético, encontramos várias denominações que variam de local e época. Por exemplo, ele é chamado de triângulo de Pascal pelos franceses, triângulo de Tartaglia pelos italianos, Yang Hui para os chineses, triângulo combinatório, dentre outras denominações. Sua importância se dá devido as tantas propriedades que aparecem nas “entrelinhas” deste triângulo. Sugerimos que você pare alguns minutos e tente visualizar outras propriedades. É um desafio interessante!

Exemplos:

(1) Mostre a validade da relação de Stifel.

Para mostrar a validade desta importante relação, vamos desenvolver os coeficientes binomiais envolvidos:

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{p} &= \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \\
 &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p+1)!} + \frac{(n-1)!}{(p)!(n-1-p)!} \\
 &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p)!(n-p-1)!} \\
 &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)(n-p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(p)(p-1)!(n-p-1)!} \\
 &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p-1)!} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{n-p} \right) \\
 &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p-1)!} \left(\frac{n}{p(n-p)} \right) \\
 &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p-1)!} \left(\frac{n}{p(n-p)} \right) \\
 &= \frac{n(n-1)!}{p(p-1)!(n-p)(n-p-1)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}
 \end{aligned}$$

(2) Calcule $\binom{9}{7} + \binom{9}{8}$

Para calcular a soma destes coeficientes binomiais, vamos utilizar a relação de Stifel:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

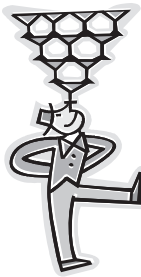
Neste caso temos:

$$n-1 = 9 \Rightarrow n = 10$$

$$p-1 = 7 \Rightarrow p = 8$$

$$\binom{10}{8} = \binom{9}{7} + \binom{9}{8}$$

$$\binom{10}{8} = \frac{10!}{8!2!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$$



Parada recreativa

Será que o binômio de Newton pode lhe ajudar a resolver este desafio??

Qual o valor da expressão?

$$(x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c) \cdot (x-d) \cdot (x-e) \dots (x-x) \cdot (x-y) \cdot (x-z) = ?$$

Pense... Pense... Pense...

A resposta correta é

$$(x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c) \cdot (x-d) \cdot (x-e) \dots (x-x) \cdot (x-y) \cdot (x-z) = 0$$

Você conseguiu visualizar por quê?

Desafio extraído de: <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2b.html>.



Síntese

Nesta unidade você estudou o binômio de Newton e teve a oportunidade de revisar operações básicas a partir do desenvolvimento de expressões deste tipo.

Vale destacar que este conteúdo é normalmente trabalhado no Ensino Médio e que ao seguir em frente, você pode começar a visualizar o seu estudo como um futuro professor de matemática.

Faça uma reflexão sobre as principais dificuldades que enfrentou ao estudar o conteúdo e anote em um papel. Estas dificuldades podem ser as mesmas de seus futuros alunos.

Ao fazer um curso de matemática você deve sempre estar atento ao seu futuro em sala de aula (presencial ou a distância)! Pense nisto e não siga adiante se estiver com dúvidas!



Atividades de auto-avaliação

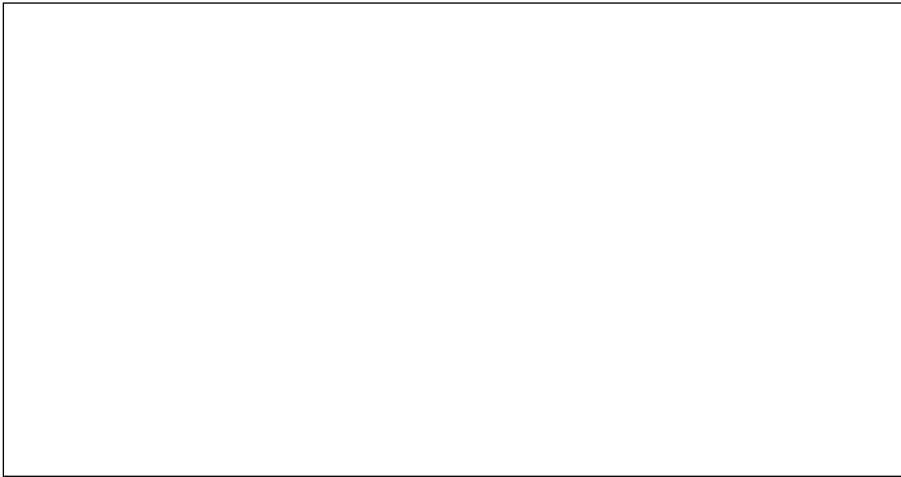
(1) Desenvolva a expressão $(x + a)^3$ usando o diagrama de árvore.

(2) Desenvolva as seguintes expressões usando o teorema binomial.

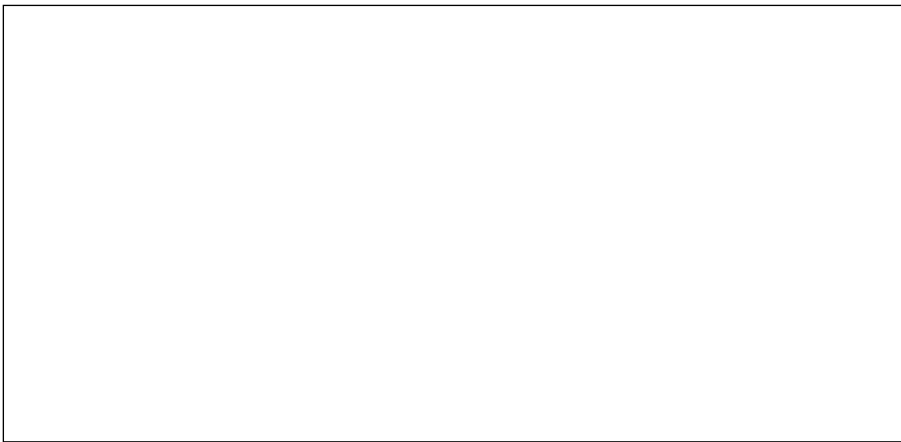
(a) $(x + 3y)^3$

(b) $(3 - z)^5$

(c) $(4 - x^3)^4$



(d) $(x + y)^{10}$



(3) Determine os 3 primeiros termos do desenvolvimento de $(x + y)^{80}$.
Considere as potências de expoentes decrescentes de x .



(4) Determine o número de termos quando se desenvolve os seguintes binômios:

(a) $(a+b)^{10}$

(b) $(a+b)^{21}$

(c) $(a+b)^n$

(5) Determine a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de $(4x+2y)^5$.

(6) Determine o valor de p , sabendo que a soma dos coeficientes numéricos do desenvolvimento de $(x+a)^p$ é igual a 512.

(7) Qual o coeficiente de x^2 no desenvolvimento de $(2x+1)^7$?

(8) Determine o coeficiente de x^4 ao desenvolver o binômio $(2-x)^6$.

(9) Calcule o coeficiente de x no desenvolvimento de $\left(x + \frac{3}{2x}\right)^3$

(10) Determine o valor de x para que a igualdade $\binom{14}{x} = \binom{14}{2x-1}$ seja verdadeira.

(11) Qual o valor de p para que $\binom{10}{p-1} = \binom{10}{2p-3}$?



Saiba mais

Para aprofundar os conteúdos estudados nesta unidade ou mesmo resolver outros exercícios você pode utilizar livros do Ensino Médio que abordem o conteúdo Binômio de Newton. Os livros do Prof. Gelson Iezzi trazem uma ótima fundamentação e vários exercícios resolvidos. Confira:

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática**: ciência e aplicações. Vol. 2. 2. ed. São Paulo: Atual, 2004.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática**: volume único. São Paulo: Atual, 1997.

UNIDADE 3

3

Polinômios



Objetivos de aprendizagem

- Reconhecer polinômios em diferentes expressões algébricas.
- Identificar as representações de uma expressão algébrica.
- Calcular o valor numérico dos polinômios identificando as raízes.
- Desenvolver cálculos algébricos envolvendo operações com polinômios.



Seções de estudo

Seção 1 Introdução aos Polinômios

Seção 2 Operações com Polinômios



Para início de conversa

Nesta unidade você estudará os polinômios, tendo como idéia central a discussão dos aspectos que integram os conceitos básicos que definem e caracterizam os polinômios.

Vale destacar que você deve exercitar um olhar didático ao estudar os conteúdos que serão apresentados.

Procure lembrar a forma como os conteúdos foram apresentados a você durante o ensino fundamental ou médio, questione se os conceitos principais foram abordados de forma adequada e, principalmente, correta. Faça uma viagem ao futuro (ou mesmo ao presente, caso você já trabalhe este conteúdo em sala de aula) e imagine-se trabalhando de forma diferente, criativa e inovadora.

Aproveite o Espaço Unisul Virtual de Aprendizagem, disponível on-line, para discutir estes aspectos com seus colegas e professor tutor.

Não perca tempo, já é hora de começar!



SEÇÃO 1 - Introdução aos polinômios

Para iniciar esta unidade, é importante relembrarmos conceitos que você já estudou no ensino fundamental e médio. Observe a notação que será utilizada e lembre conceitos chave para o estudo dos polinômios.



Em Álgebra elementar denominamos **polinômios** a expressão:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

sendo n um número natural, $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ números pertencentes a um conjunto, por exemplo, o conjunto dos números reais e x uma variável.

Adotamos a seguinte nomenclatura:

- coeficientes: $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$
- termos: $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, a_{n-2} x^{n-2}, \dots, a_2 x^2, a_1 x, a_0$.

Exemplo:

$P(x) = -2x^4 + 5x^3 - x^2 + x + 2$ e um polinômio sendo $-2, 5, -1, 1, 2$ seus coeficientes e $-2x^4, 5x^3, -x^2, x, 2$ seus termos.

Podemos utilizar outras notações para representar um polinômio. Por exemplo:

$$P(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + a_3 x^{n-2} + \dots + a_n x + a_{n+1}$$

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n$$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$



Olhando o passado!

A palavra **Al-jabr** deu origem ao nome Álgebra. Foi em Bagdá, em 820 aproximadamente que **Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi** escreveu sua grande obra. Seu livro mais importante denominava-se **Al-jabr** e apresentava claramente como resolver uma equação do segundo grau.

A palavra Al-jabr significa restauração. Na nossa notação atual Al-jabr significa uma regra para transformar uma igualdade numa outra igualdade tendo o mesmo valor. Por exemplo,

$$2x + 3 = 10$$

$$2x = 10 - 3 .$$

Essa regra ou operação deu origem ao que hoje costumamos falar sem rigor matemático “passa para o outro lado com sinal contrário”.



Grau de um polinômio

Seja

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_p x^p + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

um polinômio que tem pelo menos um coeficiente não nulo. Dizemos que o **grau** de $P(x)$ é p se, e somente se, $a_p \neq 0$ e todos os coeficientes com índices maiores do que p são nulos.

Denotamos o grau de $P(x)$ por $gr(P)$.



Pare! Observe!

Quando todos os coeficientes de um polinômio $P(x)$ são nulos, não definimos $gr(P)$.

Exemplo:

Determine o grau de cada um dos polinômios.

$$P(x) = 6x^3 + 3x^2 - 2x + 1 \quad gr(P) = 3$$

$$Q(x) = 3 - x^2 + 4x^4 + 2x \quad gr(Q) = 4$$

$$T(x) = 8 \quad gr(T) = 0$$



Valor numérico de um polinômio

No polinômio:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

fazendo $x = c$ obtemos o número real

$$P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + a_{n-2} c^{n-2} + \dots + a_2 c^2 + a_1 c + a_0$$

que é denominado valor numérico de $P(x)$ para $x = c$.



Raiz ou zero de um polinômio

Quando $P(c) = 0$, dizemos que c é um zero ou raiz do polinômio $P(x)$.

Exemplos:

1) Para $P(x) = 3x^2 + 2x - 6$ calcular os valores numéricos quando $x = -2$, $x = 0$ e $x = 1$.

Temos,

$$P(-2) = 3(-2)^2 + 2(-2) - 6 = 2$$

$$P(0) = 3(0)^2 + 2(0) - 6 = -6$$

$$P(1) = 3(1)^2 + 2(1) - 6 = -1$$

2) Para $P(x) = x^2 - 5x + 6$ temos que

$$P(2) = (2)^2 - 5(2) + 6 = 0$$

$$P(3) = (3)^2 - 5(3) + 6 = 0$$

Assim 2 e 3 são raízes de $P(x)$.



Pare! Observe!

Esses valores não são encontrados “magicamente”, vamos mais adiante discutir métodos para encontrar as raízes dos polinômios.



Olhando o presente!

Veja o seguinte problema:

P1) Um vendedor de uma loja ganha por mês R\$300,00 mais a comissão, que é de 5% do valor das vendas.

a) Qual é o polinômio que expressa o salário desse vendedor?

b) No mês de fevereiro as vendas são baixas, por isso neste mês o vendedor vendeu só R\$1500,00, de quanto será seu salário?

O polinômio que expressa o salário do vendedor é $300 + 0,05x$, sendo x a variável que expressa o valor das vendas.

No mês de fevereiro, se ele vendeu R\$1500,00, então temos $x = 1500$ e podemos então determinar o valor numérico do polinômio que expressa o seu salário:

$$300 + 0,05 \cdot 1500 = 300 + 75 = 375 .$$

Portanto o vendedor receberá R\$ 375,00 em fevereiro.

Um conjunto de algarismos e letras, unidos por sinais de operação denomina-se expressão algébrica. As letras podem receber valores de um dado conjunto universo. Usualmente são denominadas **variáveis**.

Exemplo:

- Todos os polinômios

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ são expressões algébricas com uma variável x .

- Os termos

$a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, a_{n-2} x^{n-2}, \dots, a_2 x^2, a_1 x, a_0$, de um polinômio são expressões algébricas na variável x .



Mas será que existem expressões algébricas com duas ou mais variáveis?

Para responder essa pergunta observe as expressões seguintes:

$$3xy \quad \frac{2}{3}ab \quad 4abc \quad 3x^2y + 2xy^2 - 3x + 2y.$$

Perceba que é possível termos expressões algébricas que envolvam duas ou mais variáveis.



A partir desta constatação, existem polinômios de várias variáveis?

Observe a expressão:

$$5x^3y + 2x^2y^3 - 4x^2y^2 - 65y^4.$$

É possível dizer que esta expressão representa um polinômio em x de terceiro grau e um polinômio em y do quarto grau. Também pode-se dizer que este é um polinômio em x e y do quinto grau. Veja o resumo abaixo:

$$P(x) = 5x^3y + 2x^2y^3 - 4x^2y^2 - 65y^4$$

- $gr(P) = 3$
- coeficientes: $5y, 2y^3, -4y^2, -65y^4$
- termos: $5x^3y, 2x^2y^3, -4x^2y^2, -65y^4$

$$Q(y) = 5x^3y + 2x^2y^3 - 4x^2y^2 - 65y^4$$

- $gr(Q) = 4$
- coeficientes: $5x^3$, $2x^2$, $4x^2$, 65
- termos: $5x^3y$, $2x^2y^3$, $4x^2y^2$, $65y^4$

ou ainda, $R(x, y) = 5x^3y + 2x^2y^3 - 4x^2y^2 - 65y^4$

- $gr(T) = 5$
- coeficientes: 5 , 2 , -4 , -65
- termos: $5x^3y$, $2x^2y^3$, $4x^2y^2$, $65y^4$

Um outro conceito importante no estudo dos polinômios é sobre **termos semelhantes**. Dizemos que dois ou mais termos de um polinômio são ditos semelhantes quando diferem apenas pelos seus coeficientes.

- $2x^2$ é semelhante a $-3x^2$.
- ax^3 é semelhante a bx^3 .
- $2xy$ é semelhante a $\frac{1}{2}xy$.

É usual simplificar a apresentação de um polinômio que tem termos semelhantes efetuando a redução de termos semelhantes.

Por exemplo, o polinômio $5x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}x^2 - 3$ pode ser reduzido

(ou simplificado) para $5x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3$.

Os polinômios podem ser classificados quanto ao número de termos. Acompanhe:

- Monômio - quando tem um único termo.
Exemplos: $2x^3$, $3ab$
- Binômio - quando tem dois termos.
Exemplos: $x - 3$; $2a^2b - 3ab$
- Trinômio - quando tem três termos.
Exemplos: $x^2 - 3x + 4$; $4ab - b^2 + 3a$

**Pare! Revise!**

Na unidade 2 você estudou o binômio de Newton, que é um polinômio com dois termos.

Se o polinômio tiver mais de três termos, não receberá nome específico. Nessa classificação todo polinômio pode ser visualizado como uma **soma de monômios**.

Os polinômios podem ser classificados, também, quanto ao expoente das variáveis:

- Racional Inteiro - quando todos os expoentes das variáveis são números inteiros positivos.
- Racional Fracionário - quando pelo menos uma variável tiver expoente inteiro negativo.
- Irracional - quando pelo menos uma variável tiver expoente fracionário.
- Transcendente - quando pelo menos uma variável tiver como expoente um número irracional ou complexo.

Exemplo:

Racional Inteiro: $2x^3 - 2x + 1$; $3ab$.

Racional Fracionário: $4x^2 - 2x + \frac{1}{x}$.

Irracional: $3\sqrt{x} - 2x$.

Transcendente: $3x^{\sqrt{2}}$; $4x - 2x\sqrt{-2}$.



Olhando o passado!

Diofante foi um grande Matemático estudioso da álgebra que viveu em Alexandria no século IV a.C. Tudo o que se sabe sobre ele estava gravado em seu túmulo:

"Caminhante! Aqui foram sepultados os restos de Diofante. E os números podem mostrar - oh, milagre - quão longa foi a sua vida, cuja sexta parte constituiu sua formosa infância. E mais um duodécimo pedaço de sua vida havia transcorrido quando de pêlos se cobriu o seu rosto. E a sétima parte de sua existência transcorreu em um matrimônio sem filhos. Passou-se um quinquênio mais e deixou-o muito feliz o nascimento de seu primeiro filho, que entregou à terra seu corpo, sua formosa vida, que durou somente a metade da de seu pai. E com profundo pesar desceu à sepultura, tendo sobrevivido apenas quatro anos ao descenso de seu filho. Diga-me: Quantos anos viveu Diofante quando lhe chegou a morte?" (GUELLI, Oscar. Equação: O Idioma da álgebra. **Contando a história da Matemática**, v.2. São Paulo: Ática, 1993. p.6 -7)

SEÇÃO 2 - Operações com polinômios

Antes de apresentar as operações com polinômio, é importante conceituar polinômio identicamente nulo e polinômios idênticos.



Polinômio identicamente nulo

Um polinômio $P(x)$ é dito nulo (ou identicamente nulo) quando, temos $P(x) = 0$ para todo $x \in R$ (Reais). Assim, se

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

é um polinômio nulo, então

$$a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0.$$

Exemplo:

Encontrar a, b, c para que $P(x) = (3-a)x^2 + (b)x - (c+2)$ seja identicamente nulo.

$$\text{Fazendo } \begin{cases} 3-a=0 \\ b=0 \\ c+2=0 \end{cases} \text{ obtemos os coeficientes de } P(x)$$

$$\text{que são } \begin{cases} a=3 \\ b=0 \\ c=-2 \end{cases} .$$

**Polinômios idênticos**

Para que dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$, de ordem n , sejam considerados idênticos é necessário que $P(x) = Q(x)$ para todo $x \in R$. Assim,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

e

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

são idênticos se

$$a_0 = b_0$$

$$a_1 = b_1$$

.....

$$a_n = b_n$$

Exemplo:

Obter os coeficientes do polinômio $P(x) = ax^2 + bx + c$ considerando que $P(x)$ é igual a $Q(x) = 2x^2 - x + 1$.

Nesse caso, $a = 2$, $b = -1$ e $c = 1$.



Olhando o passado!

Você acha que só matemático estudava matemática na antiguidade? Engano seu! Nicolas Chuquet, foi um médico nascido em Paris (1445) que escreveu um livro "Triparty en la science des nombres" dividido em três partes fazendo as discussões dos temas:

- Operações aritméticas com números racionais.
- Raízes de números.
- Regra da incógnita (regle des premiers).

O Triparty não se parece muito com as obras anteriores sobre aritmética ou álgebra. Há evidências de que o autor teve influência italiana e conhecia as obras do Matemático Fibonacci. O autor usava uma linguagem toda própria para falar das incógnitas - "premiers" e denominava a segunda potência por "champs"; a terceira potência por "cubiez" e a quarta potência por "champs de champ".

Chuquet parecia conhecer as propriedades de potências. Vejam algumas notações:

Notação de hoje	Notação de Chuquet
$5x$	$.5.^1$
$6x^2$	$.6.^2$
$9x^0$	$.9.^0$
$9x^{-2}$	$.9.^{2.m.}$
$4x = -2$	$.4.^1 \text{ egaulx a } \bar{m}.2.^0$

Adição de polinômios

A soma de dois polinômios é o polinômio formado por todos os termos dos polinômios dados. Assim, para:

$$P_1(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

e

$$P_2(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

o polinômio $P(x) = P_1(x) + P_2(x)$ será:

$$P(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Exemplos:

1) Calcular o polinômio $P(x) = P_1(x) + P_2(x)$ dados

$$P_1(x) = 5x^4 - \frac{2}{5}x^3 - x^2 + x + 5 \text{ e } P_2(x) = x^4 + \frac{3}{5}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - x + 2 .$$

Temos que:

$$P(x) = (5+1)x^4 + \left(\frac{-2}{5} + \frac{3}{5}\right)x^3 + \left(-1 - \frac{1}{6}\right)x^2 + (1-1)x + (5+2)$$

$$\text{Portanto, } P(x) = 6x^4 + \frac{1}{5}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + 7 .$$

2) Para $P_1(x) = 5x^4 + x + 5$ e $P_2(x) = 2x^3 - x^2 - x + 2$ vamos obter

$$P_1(x) + P_2(x) = 5x^4 + 2x^3 - x^2 + 7 .$$

3) Efetuar a adição dos polinômios de várias variáveis

$$P(x, y) = 2xy + 3x^2 + 3y^2 \text{ e } Q(x, y) = 5xy - y^2 .$$

Obtemos,

$$P(x, y) + Q(x, y) = 7xy + 3x^2 + 2y^2 .$$



Pare! Observe!

Ao efetuar a adição estamos trabalhando com a adição de monômios (termos) semelhantes

4) Calcular o polinômio $P(x) = P_1(x) + P_2(x)$ dados

$$P_1(x) = 4x^4 - 2x^3 - x \text{ e } P_2(x) = 5x^3 - 3x^2 + 5 .$$

Temos, $P(x) = (4+0)x^4 + (-2+5)x^3 + (0-3)x^2 + (-1+0)x + (0+5)$

$$\text{ou } P(x) = 4x^4 + 3x^3 - 3x^2 - x + 5 .$$

Subtração de polinômios

Lembrando que a operação Subtração é uma operação inversa da Adição, podemos escrever:

$$\text{se } R(x) = P(x) + Q(x) \text{ temos } P(x) = R(x) - Q(x)$$

sendo que $-Q(x)$ representa o inverso de $Q(x)$.

Os polinômios inversos são obtidos trocando-se o sinal de cada termo.

Assim, na prática, escrevemos:

$$\text{dados } P_1(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ e}$$

$$P_2(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \text{ o polinômio}$$

$$P(x) = P_1(x) - P_2(x) \text{ será:}$$

$$P(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + (a_{n-2} - b_{n-2})x^{n-2} + \dots + (a_2 - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$$

Exemplo:

Calcular o polinômio $P(x) = P_1(x) - P_2(x)$ dados:

$$P_1(x) = 5x^4 - \frac{2}{5}x^3 - x^2 + x + 5 \text{ e } P_2(x) = x^4 + \frac{3}{5}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - x + 2 .$$

$$\text{Temos que } P(x) = (5-1)x^4 + \left(\frac{-2}{5} - \frac{3}{5}\right)x^3 + \left(-1 + \frac{1}{6}\right)x^2 + (1+1)x + (5-2)$$

$$\text{portanto, } P(x) = 4x^4 - x^3 - \frac{5}{6}x^2 + 2x + 3 .$$



Olhando o presente!

Veja o seguinte problema:

P2) Um comerciante percorre três feiras. Na primeira ele dobra seu dinheiro e gasta R\$ 30,00; na segunda triplica seu dinheiro e gasta R\$ 54,00; na terceira ele quadruplica seu dinheiro e gasta R\$ 72,00. Se ficou com R\$ 48,00, que importância tinha no início da sua caminhada? (Problema de Chuquet com adaptação de redação).

Este é um interessante problema que aborda uma aplicação dos polinômios. Vamos supor que o comerciante tinha x reais no início da caminhada. O que queremos determinar é o valor de x , após ter percorrido as três feiras. Acompanhe o raciocínio:

Na primeira feira fica com $2x - 30$.

Na segunda feira fica com
 $3 \cdot (2x - 30) - 54 = 6x - 90 - 54 = 6x - 144$.

E na terceira feira fica com
 $4 \cdot (6x - 144) - 72 = 24x - 576 - 72 = 24x - 648$.

Como o comerciante ficou com R\$48,00 então
 $24x - 648 = 48$.

$$24x - 648 = 48 \rightarrow 24x = 48 + 648 \rightarrow 24x = 696 \rightarrow x = \frac{696}{24} \rightarrow x = 29$$

Assim, o comerciante tinha R\$29,00 no início da caminhada.

Multiplicação de polinômios

O produto de dois polinômios $P_1(x)$ e $P_2(x)$ é obtido pela multiplicação de cada termo de $P_1(x)$ por todos os termos de $P_2(x)$, reduzindo, após, os termos semelhantes.

Exemplos:

1) Dados $P_1(x) = 2x^2 + 3x - 1$ e $P_2(x) = x + 3$, temos que:

$$\begin{aligned} P_1(x) \cdot P_2(x) &= (2x^2 + 3x - 1) \cdot (x + 3) \\ &= 2x^2(x + 3) + 3x(x + 3) - 1(x + 3) \\ &= 2x^3 + 6x^2 + 3x^2 + 9x - x - 3 \\ &= 2x^3 + 9x^2 + 8x - 3. \end{aligned}$$

2) A multiplicação de polinômios pode ser trabalhada na forma de dispositivo prático similar ao usado com números. Observe o exemplo 1) apresentado no dispositivo:

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 3x - 1 \\ \times \quad x + 3 \\ \hline 6x^2 + 9x - 3 \\ 2x^3 + 3x^2 - x \\ \hline 2x^3 + 9x^2 + 8x - 3 \end{array}$$

3) Acompanhe um exemplo com polinômios de várias variáveis.
 $(x^2 + y^2 + 2xy)(2x + 3y) = 2x^3 + 5x^2y + 8xy^2 + 3y^3$.

4) Anote os exemplos seguintes:

$$(x + y)(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)(x - y) = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

5) Quando os fatores de uma multiplicação são iguais dizemos que temos uma potência. Observe o exemplo:

$$\begin{aligned} (x^2 + 3x - 1)^2 &= (x^2 + 3x - 1)(x^2 + 3x - 1) \\ &= x^4 + 6x^3 - 7x^2 - 6x + 1 \end{aligned}$$



Pare! Revise!

Esses produtos são denominados Produtos Notáveis.

Divisão de polinômios

Na divisão de números temos, por exemplo, o seguinte raciocínio: ao dividir 185 por 4, podemos escrever uma relação entre o divisor, o quociente e o resto. Veja:

$$\begin{array}{r} 185 \overline{) 4} \\ -16 \quad 46 \\ \hline 25 \\ -24 \\ \hline 1 \end{array}$$

Podemos afirmar que o número 185 pode ser representado por:

$$4 \times 46 + 1$$

$$\text{Dividendo} = \text{Divisor} \times \text{Quociente} + \text{Resto}$$

Outra representação usual da divisão é: $\frac{185}{4} = 46\frac{1}{4} = 46 + \frac{1}{4}$

ou seja,

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{Quociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$$



E se ao invés de números tivéssemos polinômios?

O procedimento seria análogo ao exposto. Podemos, para facilitar, escrever o dividendo com todos os termos, em ordem decrescente, colocando zero quando o termo não existir. A divisão termina quando o grau do resto tornar-se inferior ao grau do divisor.

Veja como funciona!

Exemplo:

Dividir $P(x) = x^3 + x^2 + 4$ por $Q(x) = x^2 + 2$.

Vamos usar um dispositivo prático similar ao utilizado com números.

$$\begin{array}{r}
 \text{Dividendo} \rightarrow \quad x^3 + 2x^2 + 0x + 4 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + 2 \\ \hline x + 2 \end{array} \right. \begin{array}{l} \leftarrow \text{Divisor} \\ \leftarrow \text{Quociente} \end{array} \\
 \quad -x^3 \qquad \qquad -2x \\
 \hline
 \quad \quad 0 + 2x^2 - 2x + 4 \\
 \quad \quad \quad -2x^2 \qquad \quad -4 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad 0 - 2x + 0 \quad \leftarrow \text{Resto}
 \end{array}$$

Assim, podemos reescrever $P(x)$:

$$x^3 + 2x^2 + 4 = (x^2 + 2) \cdot (x + 2) + (-2x)$$



Pare! Observe!

Observe que estamos definindo a divisão como uma operação inversa da multiplicação.

Divisão de $P(x)$ por $x - a$

Um dispositivo prático, para esse tipo de divisor, é o de **Briot-Ruffini**. Vamos apresentá-lo através de um exemplo.

Exemplos:

1) Dividir $P(x) = x^3 - 5x + 3$ por $D(x) = x - 2$ utilizando o Briot-Ruffini. Observar que os coeficientes do polinômio dado são 1, 0, -5, 3 e que o valor de a é 2

Passos	Resultados
Escrever todos os coeficientes de $P(x)$ e o valor de a , arranjado como mostramos ao lado.	$ \begin{array}{c cccc} a & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \\ \hline & & & & & \\ \end{array} $ ou $ \begin{array}{c cccc} 2 & 1 & 0 & -5 & 3 \\ \hline & & & & & \\ \end{array} $
Na segunda linha repetir o primeiro coeficiente de $P(x)$, observando a colocação em coluna.	$ \begin{array}{c cccc} 2 & 1 & 0 & -5 & 3 \\ \hline & 1 & & & \\ \end{array} $
Multiplicar esse coeficiente pelo valor de a , somando com o próximo coeficiente e posicionando o resultado abaixo dele ($2 \times 1 + 0 = 2$):	$ \begin{array}{c cccc} 2 & 1 & 0 & -5 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & & \\ \end{array} $
Repetir o procedimento até o último coeficiente de $P(x)$.	$ \begin{array}{c cccc} 2 & 1 & 0 & -5 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & 1 \\ \end{array} $
A linha resultante é a representação do quociente, com 1 grau inferior ao dividendo, menos o último termo que representa o resto. Assim, $x^3 - 5x + 3 \equiv (x - 2)(x^2 + 2x - 1) + 1$	

Podemos usar *Briot-Ruffini* para valores de a negativo ou positivo (lembrar que podemos escrever $(x - (-a))$). Veja o exemplo seguinte.

2) Dividir $P(x) = x^6 - 64$ por $D(x) = x + 2$.

Observe que essa divisão é exata.

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -64 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 & 0 \end{array}$$

Portanto,

$$x^6 - 64 = (x + 2)(x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16x - 32)$$



Parada Recreativa!

Um matemático que sabia operações com polinômios resolveu fazer uma mágica e mostrar que “dois mais dois é igual a zero”. Veja:

Vamos escolher dois números quaisquer a e b tal que $a - b = 4$. Em seguida vamos operar algebricamente

$$a - b = 4$$

$$a = b + 4$$

$$a(a - b) = (b + 4)(a - b)$$

$$a^2 - ab = ab - b^2 + 4a - 4b$$

$$a^2 - ab - 4a = ab - b^2 - 4b$$

$$a(a - b - 4) = b(a - b - 4)$$

$$\frac{a(a - b - 4)}{a - b - 4} = \frac{b(a - b - 4)}{a - b - 4}$$

$$a = b$$

$$a - b = 0$$

Como $a - b = 4$ temos que:

$$4 = 0$$

$$2 + 2 = 0$$

Qual foi o erro?



Síntese

Nesta unidade você estudou a definição e manipulação de objetos matemáticos no contexto dos polinômios. Ao finalizar a unidade, é importante lembrar que podemos utilizar os polinômios para converter a linguagem verbal ou escrita para a linguagem algébrica.

Por outro lado, vale também ressaltar que as dificuldades de aprendizagens, no contexto da álgebra, podem iniciar já no momento da inserção dos primeiros procedimentos operatórios. Daí a importância de concretizar as operações com problemas e exemplos.

Na próxima unidade você estudará as funções polinomiais e poderá avançar suas reflexões, visualizando, principalmente, alternativas norteadoras viáveis tanto para o ensino fundamental quanto para o ensino médio.

Então, vamos em frente? Mas não deixe de fazer os exercícios antes de continuar...



Atividades de auto-avaliação

- 1) Determinar o polinômio $P(x)$ do primeiro grau que satisfaz $P(1)=3$ e $P(-1)=-1$.

2) Qual o polinômio do segundo grau que satisfaz $P(1) = -1$, $P(-1) = 5$ e $P(0) = 0$.

3) Observe a expressão $(x - 2)(y + 4)(z - 5)$ e analise as possibilidades dessa expressão representar polinômios. Identifique termos, coeficientes, grau e raízes.

4) Dados $P(x) = 2x^5 - 3x^3 + 2x - 5$, $Q(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x - 4$ e $R(x) = 5x - 2$, calcule:

(a) $2Q(x) - \frac{1}{2}xQ(x)$

(b) $(x - 2)P(x) + R(x)$

5) Determine o resto da divisão $(2x^3 - 2x + 5)/(3x^2 - 1)$.



6) Dados

$$P(x, y) = 2xy - x^2y^3$$

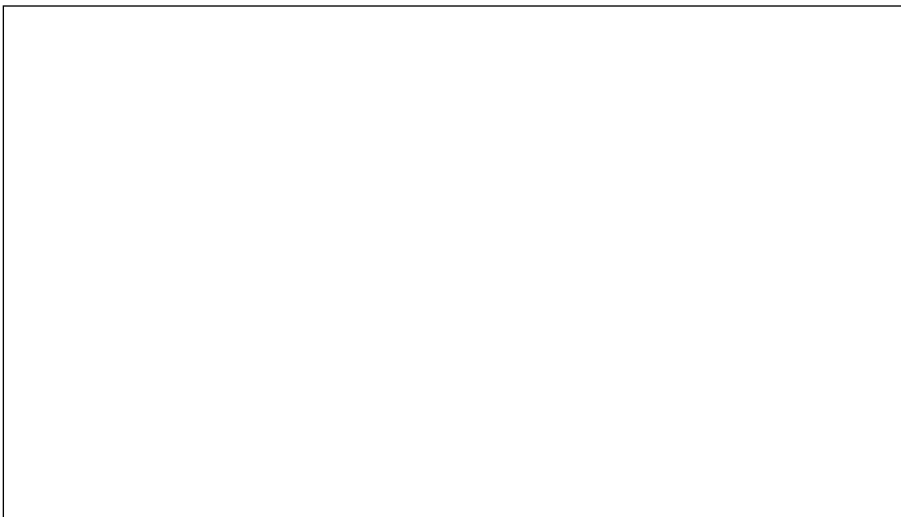
$$Q(x, y) = -2(x + y)$$

$$R(x, y) = (x + y)(2x - y^2)$$

Calcular:

(a) $2P + 3Q - R$

(b) $\frac{P}{Q}$



7) É comum aparecerem problemas históricos ou lógicos que envolvem polinômios. No decorrer do desenvolvimento da Matemática, vários matemáticos empenharam-se na resolução de problemas que nos dias de hoje são modelados por expressões polinomiais. Os grandes clássicos no contexto da matemática eram místicos e misturavam ciência e religião. A linguagem usada era a verbal, assim, o tema era falado em voz alta e os alunos deveriam decorar. Eram ditos populares, em geral em versos. Um exemplo apresentado por Oscar Guelli, no livro *Contando a História da Matemática: História da equação do 2º. grau.*

*Alegravam-se os macacos
divididos em dois bandos:
sua oitava parte ao quadrado
no bosque brincava.*

*Com alegres gritos, doze
gritando no campo estão
Sabes quantos macacos há
na manada no total?*

Que tal determinar a equação polinomial que determina o número de macacos?

8) Calcular as seguintes divisões:

(a) $\frac{6x^3 + 2x^2 - 3}{4x^3 - 1}$

(b) $\frac{2x^4 - 2x^3 + 5x - 3}{2x + 5}$



Saiba mais

Para aprofundar os conteúdos estudados nesta unidade, sugerimos a leitura dos seguintes artigos:

- Para conhecer outros problemas escritos pelo médico francês Nicolas Chuquet:
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: UNICAMP, 1995, p.320-321.

Para saber mais sobre a generalização do dispositivo de Briot-Ruffini:

- ANDRADE, L. N. Uma Generalização de Briot-Ruffini. **Revista do Professor de Matemática**, n. 34, 2º quadrimestre de 1997, p. 14-20.

UNIDADE 4

Equações Polinomiais e Funções Polinomiais

4



Objetivos de aprendizagem

- Resolver equações polinomiais em diferentes situações problemas.
- Realizar pesquisa de raízes reais e complexos nas equações polinomiais.
- Discutir as propriedades e características de funções polinomiais em ambientes computacionais.



Seções de estudo

- Seção 1** Funções polinomiais
- Seção 2** Equações polinomiais
- Seção 3** Formalizando cálculos



Para início de conversa

Apresentar as funções polinomiais de grau maior que 2 no contexto do ensino fundamental e médio, é interessante, quando utilizamos os recursos computacionais. Sabemos da importância do exercício da leitura gráfica e os gráficos das funções polinomiais em geral, pois elas representam um ponto de partida para a modelagem de problemas práticos. Suas propriedades e características estão relacionadas com o estudo das equações em geral e, dessa forma, nesta unidade vamos estabelecer uma abordagem paralela entre funções e equações.

Contamos com você nesta última etapa da disciplina!



SEÇÃO 1 - Funções Polinomiais

O estudo das funções polinomiais em paralelo com o estudo das equações é muito interessante, pois as ferramentas se complementam. Muitos conceitos aqui discutidos já são de seu conhecimento, pois foram analisados no ensino médio ou na disciplina de Tópicos de Matemática Elementar I.



Função polinomial

A função da forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

com a_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) $\in R$, $a_n \neq 0$, é dita função polinomial de grau n (n número inteiro positivo), e tem como domínio o conjunto dos números reais.

O quadro que segue apresenta exemplos e representações de funções de diferentes graus.

Denominação	Representação algébrica
Função polinomial de grau zero	$f(x) = a_1$ ou $f(x) = a$
Função polinomial do primeiro grau (Função linear ou função afim)	$f(x) = ax + b$ com a diferente de zero
Função polinomial do segundo grau (Função quadrática)	$f(x) = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$ com $a_1 \neq 0$ ou $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$.
Função polinomial do terceiro grau	$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ com $a_3 \neq 0$.

O estudo das funções polinomiais até o segundo grau é bastante comum, mas para graus maiores que dois, as dificuldades algébricas começam a aparecer. Atualmente, os recursos tecnológicos facilitam o estudo de todos os tipos de funções

polinomiais. As propriedades e características podem ser visualizadas e destacadas quando se trabalha com diversas representações semióticas, por exemplo, quando analisamos a representação gráfica em paralelo com a representação algébrica.



Olhando o futuro!

Estamos no decorrer de todo o curso, destacando a importância da utilização dos recursos tecnológicos. Didaticamente, é inovador apresentar conteúdos de matemática com o suporte computacional, pois esta ainda não é a realidade dos livros didáticos e das escolas em geral.

Veja como tudo fica mais simples e rápido usado um software de apoio!

Exemplos:

Em todos os exemplos que seguem vamos estabelecer a estratégia de usar as representações algébricas e gráficas para identificar as características da função polinomial dada.

(1) Função $y = 4$.

A Figura 4.1 mostra o gráfico desta função que é polinomial de grau zero ou função constante.

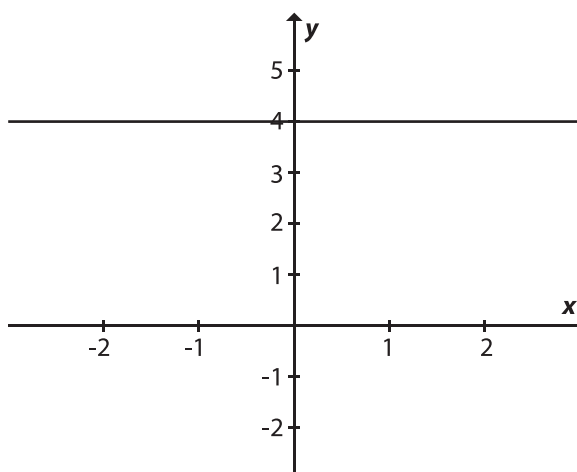


Figura 4.1 – Gráfico da função $y = 4$

Propriedade e características

- Domínio: Conjunto dos Reais;
- Conjunto Imagem: Conjunto unitário $\{4\}$;
- Raízes: não tem;
- Crescimento ou decréscimo: não tem;
- Pontos de máximo ou mínimo: não tem.

(2) Função $y = -2x + 3/2$.

A Figura 4.2 mostra o gráfico da função e suas propriedades básicas são listadas a seguir.

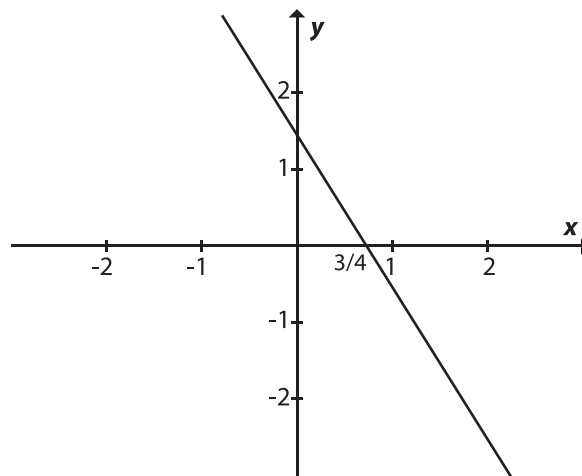


Figura 4.2- Gráfico da função $y = -2x + 3/2$

Propriedade e características

- Domínio: Conjunto dos Reais;
- Conjunto Imagem: Conjunto dos Reais ;
- Raízes: uma única raiz em $x = 3/4$;
- Crescimento ou decréscimo: a função é sempre decrescente;
- Pontos de máximo ou mínimo: não tem.

(3) Função $y = x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$

A Figura 4.3 mostra o gráfico da função.

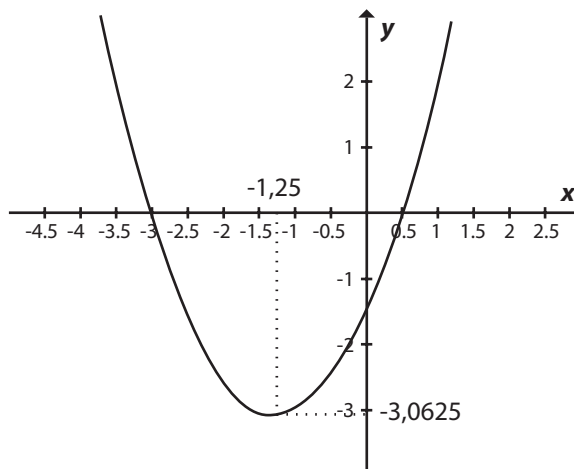


Figura 4.3- Gráfico da função $y = x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$

Propriedade e características

- Domínio: Conjunto dos Reais;
- Conjunto Imagem: $[-3,0625; +\infty)$;
- Raízes: duas raízes $\frac{1}{2}$ e -3 ;
- Crescimento ou decrescimento: a função é decrescente em $(-\infty; -1,25]$ e crescente em $[-1,25; +\infty)$;
- Pontos de máximo ou mínimo: tem um ponto de mínimo em seu vértice - $(-1,25; -3,0625)$.

(4) Função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 6$

Na Figura 4.4 tem-se a representação gráfica desta função do terceiro grau.

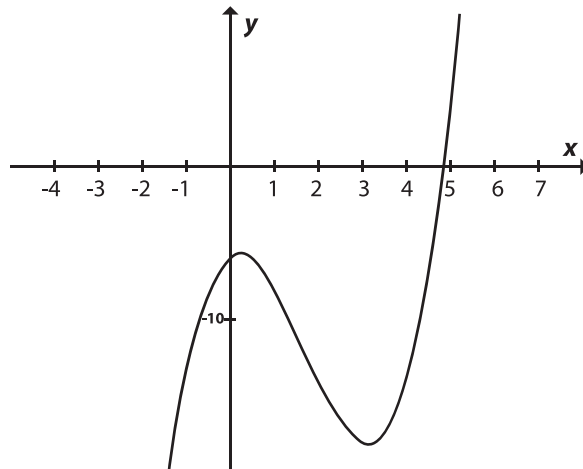


Figura 4.4- Gráfico da função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 6$

Propriedade e características

- Domínio: Conjunto dos Reais;
- Conjunto Imagem: Conjunto dos Reais;
- Raízes: no gráfico observa-se uma raiz real próxima de cinco e duas raízes complexas;
- Crescimento ou decréscimo: a função tem dois intervalos de crescimento e um intervalo de decréscimo. Os limites deste intervalo poderão ser encontrados com o uso de um software ;
- Pontos de máximo ou mínimo: tem um ponto de máximo e outro de mínimo em seu domínio.

Este é o tipo de exemplo para o qual podemos apresentar somente uma discussão aproximada, pois não conseguimos visualizar exatamente a raiz real representada pela interseção do gráfico com o eixo dos x . A concavidade do gráfico com intervalos de crescimento e decréscimo caracterizam a situação da existência de raízes complexas.

Novamente os recursos computacionais podem auxiliar. Veja na Figura 4.5, no quadro a seguir, o resultado apresentado no software Derive.

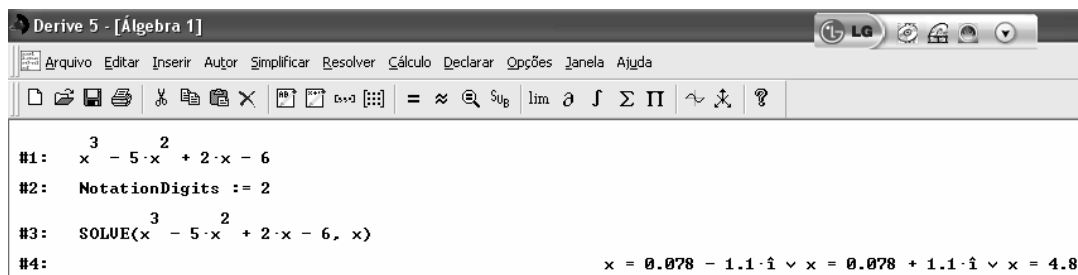


Figura 4.5

(5) Função $f(x) = 3x^5 - 4x^4 + 2x^3 + x^2 - 9x + 10$

Na Figura 4.6 tem-se o gráfico da função. Observe que, neste caso, vamos necessitar usar a representação algébrica em um ambiente computacional para conseguir ter detalhes das propriedades e características. Veja o uso do Derive na Figura 4.7.

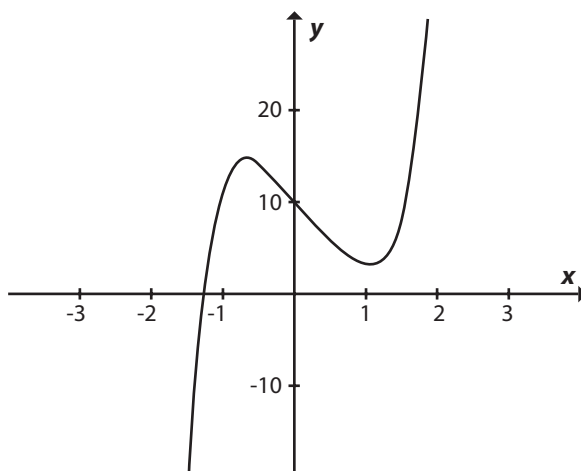


Figura 4.6- Gráfico de $f(x) = 3x^5 - 4x^4 + 2x^3 + x^2 - 9x + 10$

Propriedade e características

- Domínio: Conjunto dos Reais; Conjunto Imagem: Conjunto dos Reais;
- Conjunto Imagem: Conjunto dos Reais
- Raízes: no gráfico observa-se uma raiz real próxima de (-1) e quatro raízes complexas;

- Crescimento ou decréscimo: usando os recursos de Cálculo Diferencial no Derive podemos afirmar que a função cresce em $(-\infty; -0,66) \cup (1; +\infty)$ e decresce em $(-0,66; 1,0)$. Observe os cálculos na Figura 4.7 do Derive. Veja que realizamos uma aproximação com duas casas decimais.
- Pontos de máximo ou mínimo: tem um ponto de máximo e outro de mínimo em seu domínio; o ponto de mínimo está localizado em $x \cong 1,0$ e o ponto de máximo em $x \cong -0,66$.

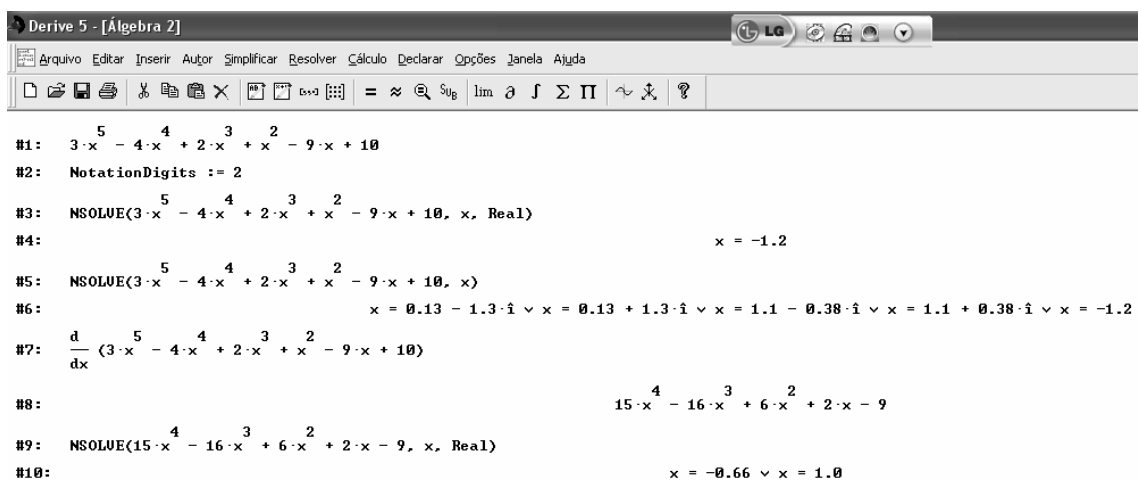


Figura 4.7

Na seção seguinte vamos discutir um pouco mais as equações polinomiais que auxiliam no estudo dos polinômios e no estudo das funções polinomiais.

SEÇÃO 2 - Equações Polinomiais

No dia-a-dia de um professor de matemática é sistemático o uso de diferentes tipos de equações. Temos:

Equações algébricas – são aquelas que podem ser escritas na forma polinomial ou que podem ser reduzidas a uma forma polinomial.

Equações transcendentais – são aquelas que não podem ser reduzidas a uma forma polinomial. Geralmente as equações transcendentais envolvem funções do tipo exponencial, logarítmica, trigonométrica etc.



Definição

Seja

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

um polinômio na variável x . A equação

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

ou $P(x) = 0$ é dita uma equação polinomial ou, simplesmente, equação algébrica.

O número α é denominado **raiz (ou zero) da equação polinomial** se $P(\alpha) = 0$.



Olhando o passado!

A busca de todas as raízes de uma equação polinomial mobilizou muitos matemáticos em diferentes épocas. Hoje sabemos que uma equação polinomial de grau ($n \geq 1$) admite n e somente n raízes. Essas raízes podem ser números reais ou números complexos.

De modo geral, sabemos que as equações são importantes no nosso dia-a-dia, pois elas modelam os problemas. Garbi (1997, p.1) inicia seu livro afirmando que “a própria linguagem cotidiana já incorporou o verbo “equacionar” e expressões como “o xis do problema”.



Como achar o “xis” do problema?

Para achar “o xis” é necessário resolver a equação que modela o problema. Para tal, visualizamos a correlação que ela expressa e encontramos alguma coisa que desconhecemos e que costumamos denominar de incógnita.

Nesta unidade vamos discutir um pouco a resolução das equações polinomiais que modelam um grande número de problemas práticos.



Olhando o passado!

Foi em 1799 que Karl Friedrich Gauss, com apenas 21 anos de idade, defendeu o seu doutorado brindando o mundo com o seu famoso **Teorema fundamental da Álgebra**:

Toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos tem pelo menos uma raiz.

Este importante teorema permitiu que outras propriedades das equações polinomiais pudessem ser estabelecidas. Na história da Matemática, muitos nomes estão ligados ao desenvolvimento da teoria das equações algébricas. Veja no seu material on-line uma retrospectiva histórica.



Olhando o presente!

Veja a seguir problemas que são modelados com funções polinomiais.

P1: Dois corpos A e B se movimentam com velocidades constantes. Suas posições são modeladas por funções polinomiais do primeiro grau dadas por:

$$s_1 = t - 2 \quad \text{e} \quad s_2 = 3 - t$$

sendo t o tempo dado em segundos. Qual o momento em que os dois corpos se encontram?

P2: Um comerciante comprou um lote de mercadorias por R\$ 540,00. Vai vender cada unidade por R\$ 5,40 e seu lucro será definido em função de x unidades vendidas. Analisar as seguintes situações:

- Qual a função que modela esta situação apresentada?
- Quantas unidades devem ser vendidas para que o comerciante comece a ter lucro?

Solução do P1:

O problema já está modelado com duas funções do primeiro grau e a solução é obtida igualando-se as expressões algébricas e formando uma equação polinomial do primeiro grau. Veja:

$$t - 2 = 3 - t$$

$$2t - 5 = 0$$

$$2t = 5$$

$$t = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ segundos.}$$

Solução do P2:

A função que vai modelar esse problema é uma função polinomial do primeiro grau: $L(x) = 540x - 540$ sendo L o lucro e x a quantidade de mercadoria do lote vendida.

O comerciante começa a ter lucro quando a função dada é positiva. Fazendo-se o gráfico da função (ver Figura 4.8), podemos observar que somente a partir da centésima unidade do lote vendida é que o comerciante tem lucro.

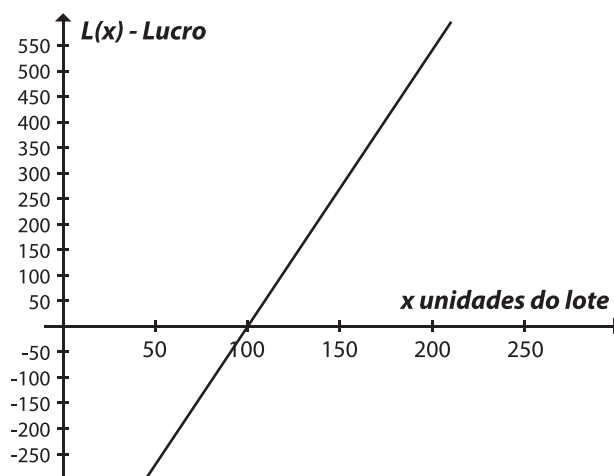


Figura 4.8

Na seção seguinte vamos discutir detalhes formais na análise de equações polinomiais.

SEÇÃO 3 - Formalizando cálculos

Uma das características de uma equação polinomial é a possibilidade de separá-la em forma de fatores lineares. Para tal, é necessário alguns formalismos matemáticos.



O polinômio $P(x)$ é divisível por $x-c$ se, e somente se, o número c for raiz do polinômio $P(x)$, isto é, se e somente se $P(c) = 0$

Então se c é raiz de $P(x) = 0$ temos que $P(x) = (x - \alpha_1) \cdot q_0(x) = 0$. Continuando este procedimento e sendo α_2 também raiz de $P(x) = 0$ fica $q_0(x) = (x - \alpha_2) \cdot q_1(x)$. Podemos, sucessivamente, obter a equação na forma fatorada em fatores lineares.

$$P(x) = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n) = 0$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ raízes de $P(x) = 0$

Este resultado nos permite observar que:

- uma equação polinomial de grau n admite n raízes;
- podemos obter raízes a partir do conhecimento de uma delas. Tendo obtido o valor de uma raiz real α_1 ,

por exemplo, podemos fazer $\frac{P(x)}{x - \alpha_1} = q(x)$. Neste

caso, a equação polinomial $q(x) = 0$ terá as outras $(n - 1)$ raízes de $P(x)$.

Exemplo:

Obter as raízes de $P(x) = x^3 - 7x + 6$ sabendo que uma de suas raízes é $x = 1$. Apresentar $P(x)$ na forma fatorada.

Solução:

Fazendo a divisão $\frac{P(x)}{x-1}$ obtemos $\frac{x^3 - 7x + 6}{x-1} = x^2 + x - 6$.

Resolvendo a equação do segundo grau $x^2 + x - 6 = 0$, chegamos aos valores das raízes $x = 2$ e $x = -3$.

Assim, o polinômio dado pode ser apresentado na sua forma fatorada:

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$$



Um polinômio pode ter raízes múltiplas?

A decomposição de um polinômio em fatores do primeiro grau pode apresentar fatores iguais, por exemplo:

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)(x-2)(x-2) = (x-2)^3$$

Dizemos que: α é **raiz de multiplicidade m ($m \geq 1$) da equação $P(x) = 0$** se, e somente se,

$$P(x) = (x-\alpha)^m \cdot q(x) \text{ e } q(\alpha) \neq 0 .$$

Assim, α é raiz de multiplicidade m de $p(x) = 0$ quando a decomposição apresentar m fatores iguais a $(x-\alpha)$.

Na equação do segundo grau, $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, sempre que $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, as duas raízes são iguais (raiz dupla).

Quando todas as raízes da equação polinomial são distintas, isto é, multiplicidade 1, dizemos que estamos diante de raízes simples.

É usual, quando apresentado o conjunto de todas as raízes de uma equação polinomial, mostrar apenas as raízes distintas, pois na notação de conjuntos convencionamos não repetir elementos.

Exemplos:

(1) No exemplo anterior mostramos que:

$$\begin{aligned}
 P(x) &= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \\
 &= (x-2)(x-2)(x-2) \\
 &= (x-2)^3
 \end{aligned}$$

Portanto, a raiz $\alpha = 2$ tem multiplicidade 3 ou grau de multiplicidade 3.

O conjunto solução da equação $P(x) = 0$ é representado simplesmente por $\{ 2 \}$.

(2) Observe as raízes da equação do segundo grau $x^2 - 6x + 9 = 0$. Ao aplicar a fórmula de Bhaskara, vamos encontrar a raiz 3 com grau de multiplicidade 2. Assim, o conjunto solução é dado por $\{ 3 \}$.



Pare! Revise!

Procure revisar a fórmula de Bhaskara para encontrar as raízes de uma equação do segundo grau. Verifique no material on-line como deduzir essa famosa fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Podemos, ao fazer a leitura gráfica de uma função polinomial, identificar o grau de multiplicidade da raiz real. Observe as Figuras 4.9 e 4.10.

Na Figura 4.9 temos a função $P(x) = (x-1)^2(x+1)$ que tem a raiz 1 com multiplicidade 2 (par), e na Figura 4.10 temos a função $P(x) = (x-2)^3$ que tem a raiz 2 com multiplicidade 3 (ímpar). Em geral, quando o grau de multiplicidade é de ordem par o gráfico toca (tangencia) o eixo dos x e quando o grau de multiplicidade é de ordem ímpar o gráfico corta o eixo dos x .

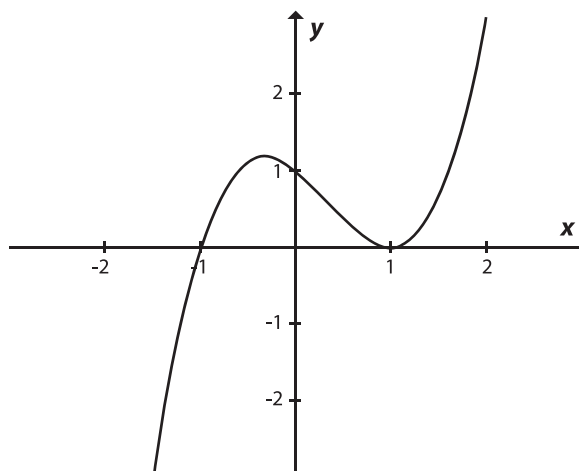


Figura 4.9 – Gráfico da função polinomial $P(x) = (x-1)^2(x+1)$

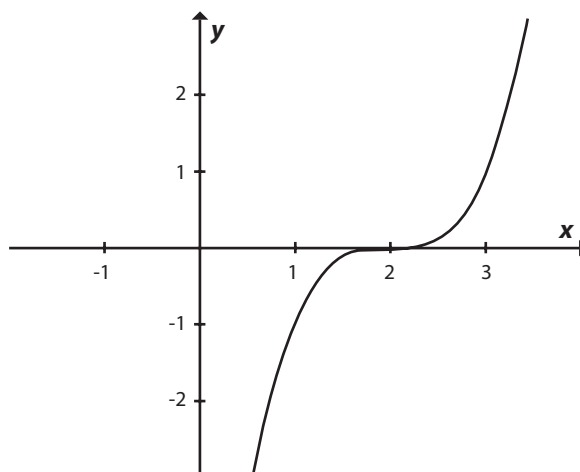


Figura 4.10 – Gráfico da função $P(x) = (x-2)^3$

Para investigar o grau de multiplicidade de uma raiz podemos utilizar o dispositivo de Briot-Ruffini, discutido na Unidade 3.

Dada uma equação polinomial $P(x) = 0$ com $x = c$ uma de suas raízes reais podemos aplicar divisões sucessivas de $P(x)$ por $(x - c)$, observando sempre o resto da divisão. O processo termina quando encontramos um resto diferente de zero.

Exemplo:

(1) Verificar o grau de multiplicidade da raiz 2 na equação $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$.

Solução:

Vamos utilizar o dispositivo de Briot-Ruffini para fazer sucessivas divisões de $P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ por $x - 2$.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -6 & 12 & -8 \\ & & 2 & -8 & 16 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 1 & -4 & 4 \\ & & 2 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 1 & -2 \\ & & 2 \\ \hline & 1 & 0 \end{array}$$

Na primeira divisão temos $\frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x - 2} = x^2 - 4x + 4$ com

resto zero. Na segunda $\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = x - 2$ com resto zero e, em

seguida, $\frac{x - 2}{x - 2} = 1$. Como os três restos sucessivos são zeros,

temos que $x = 2$ é uma raiz tripla de $P(x) = 0$.

(2) Analisar a multiplicidade da raiz 1 na equação $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 28x - 15 = 0$.

Solução:

Para agilizar, vamos aplicar o Ruffini num único dispositivo. Veja:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & -4 & -10 & 28 & -15 \\ 1 & 1 & -3 & -13 & 15 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -2 & -15 & 0 & \\ \hline & 1 & -1 & -16 & & \end{array}$$

Como encontramos dois restos zeros o grau de multiplicidade da raiz 1 é dois.



Quais as relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação polinomial?

As **relações de Girard** para uma equação polinomial

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ com } a_n \neq 0, n > 1$$

expressam relações entre as raízes e os coeficientes da equação.

Algumas destas relações podem ser dadas por:

- soma das raízes é igual a $\frac{-a_{n-1}}{a_n}$;
- o produto das n raízes é igual a $\frac{(-1)^n a_0}{a_n}$.

Quando se trata da busca de raízes de equações do segundo grau, as relações de Girard servem como se fosse um método de resolução. Veja a equação $ax^2 + bx + c = 0$ que pode ser reescrita

$$\text{como } x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Se as duas raízes são α_1 e α_2 , então, pelas relações de Girard, podemos escrever:

- $S = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{-b}{a}$;
- $P = \alpha_1 \times \alpha_2 = \frac{(-1)^2 c}{a}$.

Portanto, a equação pode ser reescrita como $x^2 - Sx + P = 0$.

Exemplo:

Para achar as raízes de $x^2 - 5x + 6 = 0$ basta aplicar as relações de Girard e encontrar as raízes cuja soma vale 5 e cujo produto vale 6. Facilmente chega-se a 2 e 3 que são as raízes da equação dada.



Como pesquisar raízes racionais?

Para a pesquisa de raízes de uma equação polinomial o fato de esta possuir coeficientes inteiros não implica em que terá raízes inteiras. Algumas das raízes racionais têm relação com os coeficientes da seguinte maneira:



Seja a equação com coeficientes inteiros

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

com $a_n \neq 0$ e $a_0 \neq 0$. Se p e q forem inteiros primos

entre si e $\alpha = \frac{p}{q}$ é uma raiz racional da equação, então

p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n .

Observe que se $a_n = 1$ então as raízes racionais da equação serão inteiras e se, além disso $a_0 = 1$ então as raízes racionais são -1 ou $+1$.

Exemplo:

Seja $P(x) = 4x^3 - 7x + 3 = 0$. Se esta equação possui raiz racional

$\alpha = \frac{p}{q}$ será da forma que p seja divisor de 3 e q divisor de 4.

Considerando que os divisores de 3 são $\{\pm 1, \pm 3\}$ e os divisores de 4 são $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$, as possíveis raízes são

$$\left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{4} \right\}.$$



Como pesquisar raízes reais e complexas?

Podemos, de forma geral, observar que em uma equação polinomial com coeficientes reais, isto é, $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ temos que:

- se a equação for do primeiro grau terá uma única raiz real;
- se for do segundo grau terá duas raízes que poderão ser duas reais ou duas complexas conjugadas;
- se for do terceiro grau terá três reais ou uma real e duas complexas;
- se for do quarto grau terá quatro reais, duas reais e duas complexas ou quatro complexas;
- etc.

Observe a solução da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$. Usando

a fórmula $\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ na qual $\Delta = b^2 - 4ac$. Se $\Delta < 0$ a equação tem duas

raízes complexas que são $\alpha_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}i$ e $\alpha_2 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}i$.

O produto dessas duas raízes complexas conjugadas resultará um número real.

Exemplo:

Calcule todas as raízes de $P(x) = x^4 - 12x^3 + 57x^2 - 132x + 136$ sabendo que uma de suas raízes é $x = 2 + 2i$.

Como a raiz indicada é complexa, temos a certeza de que a sua conjugada também será raiz. De fato a divisão

$$\frac{x^4 - 12x^3 + 57x^2 - 132x + 136}{x^2 - 4x + 8}$$

é exata (observar que $(x - (2 + 2i))(x - (2 - 2i)) = x^2 - 4x + 8$).

Para encontrar as duas raízes basta analisar o resultado da divisão que é uma expressão do segundo grau. Temos:

$$\frac{x^4 - 12x^3 + 57x^2 - 132x + 136}{x^2 - 4x + 8} = x^2 - 8x + 17.$$

A equação quociente $x^2 - 8x + 17 = 0$ tem as outras duas raízes que também são complexas $\alpha_1 = 4 + i$ e $\alpha_2 = 4 - i$.



Parada Recreativa!

Suponha-se que temos três caixinhas. Uma com duas bolas pretas, outra com duas bolas brancas e a terceira com uma preta e uma branca. As caixinhas tinham suas etiquetas correspondentes – PP, BB e PB – mas alguém as trocou de modo a estarem todas com tampas erradas. Tirando apenas uma bola por vez de qualquer das caixas, sem olhar, qual é o menor número de bolas a tirar para determinar o conteúdo das três caixas?

(Gardner, M. Divertimentos matemáticos. São Paulo: Ibrasa, 1998, p.39).



Síntese

Nesta Unidade você retomou várias idéias já discutidas no decorrer de disciplinas já cursadas. O tema abordado envolveu as funções polinomiais e as equações algébricas. Para encerrar, destacamos a importância do uso sistemático de representações semióticas no estudo de um objeto matemático. A chave da aprendizagem da matemática, na maioria das vezes, está exatamente na habilidade de manusear e converter as representações algébricas e gráficas.



Atividades de auto-avaliação

(1) Faça o gráfico das seguintes funções polinomiais usando um software gráfico e identifique as seguintes propriedades e características: domínio, conjunto imagem, raízes, crescimento ou decrescimento, pontos de máximo ou mínimo.

(a) $y = 5x - 1/3$

(b) $y = (x - 3)(2x + 4)$

(c) $y = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 4$

(d) $y = x^5 + 1$

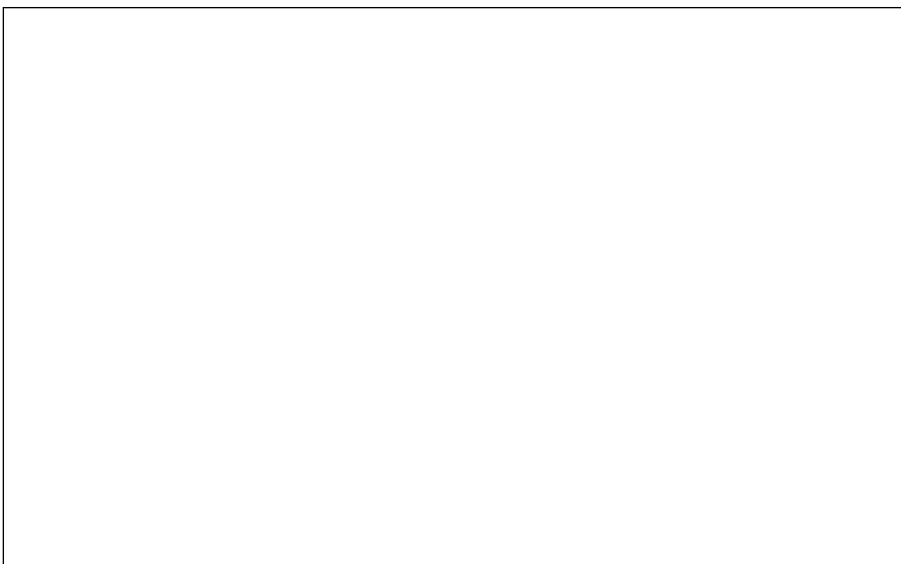
(2) As pessoas que participaram de um banquete trocaram apertos de mãos. Um dos serviçais notou que foram 435 cumprimentos e que $\frac{2}{3}$ dos convidados eram mulheres. Quantos homens estavam presentes?

(GUELLI, O. Contando a História da Matemática: História da equação do segundo grau. São Paulo: Ática, 1994, p. 45).



(3) Quantos anos têm Ana e Marta, se a soma das idades mais a diferença entre elas mais seu produto é igual a 100 anos, e Ana é mais velha do que Marta?


(GUELLI, O. Contando a História da Matemática: Equação – O idioma da álgebra, São Paulo: Ática, 1993, p. 42).



(4) Obter as raízes da equação $10x^3 - 34x^2 + 16x + 24 = 0$.



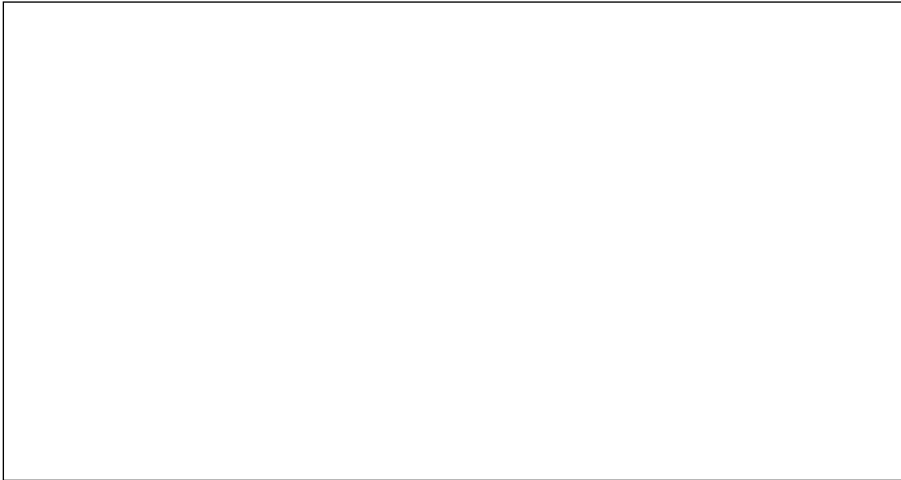
(5) Exemplifique um polinômio $P(x)$ que tenha a raiz 2 com multiplicidade 3, raiz 1 com multiplicidade 4 e que satisfaça a relação $P(0) = 8$.



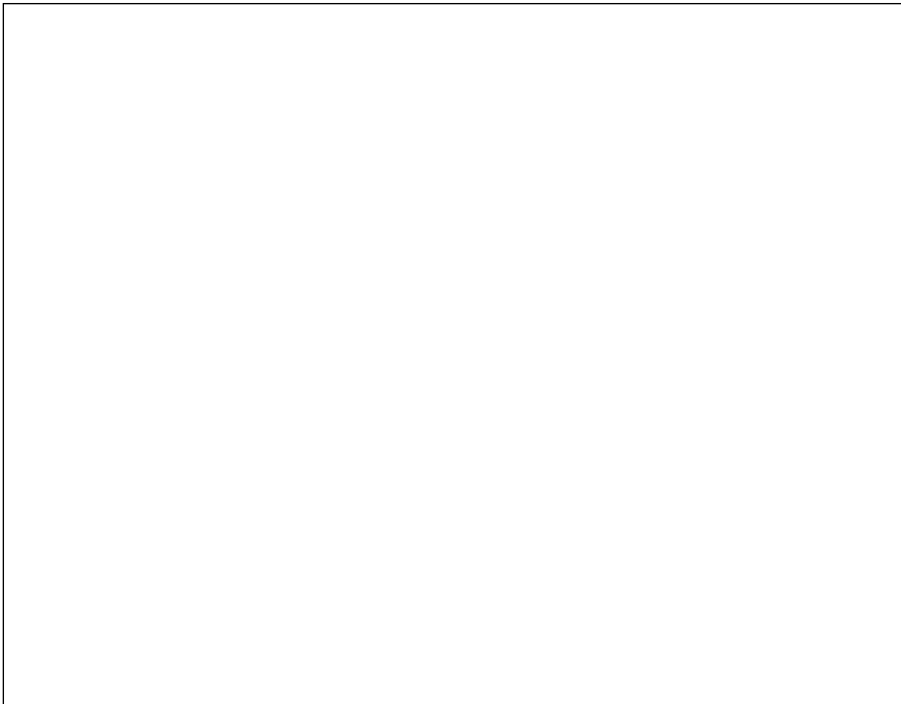
(6) Aplicar o dispositivo de Ruffini para resolver as seguintes equações:

(a) $10x^4 - 14x^3 - 52x^2 + 56x = -48$

(b) $2x^3 - 7x^2 - 2x + 7 = 0$



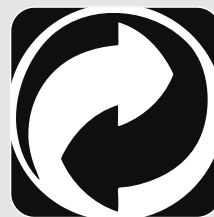
(7) Encontre um polinômio do quarto grau que tenha duas raízes complexas iguais a $1+2i$ e $1-2i$, uma raiz real igual a 1 com multiplicidade 2.





Saiba mais

Para aprofundar o estudo de polinômios, você pode analisar atentamente todas as sugestões de leituras e de sites que serão apresentadas no seu material on-line. Em especial, recomenda-se o livro *O Romance das Equações Algébricas*, de Gilberto Garbi.



Para concluir o estudo

Você concluiu esta disciplina e, portanto, deve estar preparado para refletir e discutir situações-problema que envolvem a análise combinatória e os polinômios em geral. Todos os conteúdos apresentados são temas dos programas do ensino médio. Dessa forma, eles são de grande importância para você como aluno de um curso que visa a formação de professores.

Buscamos em vários momentos incentivar o processo de reflexão, pois a prática reflexiva é uma condição necessária para enfrentar a complexidade do nosso dia-a-dia.

É importante você saber que o livro didático, como por exemplo, este da nossa disciplina, apresenta uma imensa quantidade de informações, mas o limite de tempo e espaço acaba produzindo lacunas que devem ser completadas por outros meios de informação. Este livro vai contribuir para criar as condições da aprendizagem, mas a contraposição de idéias e experiências é fundamental para consolidar a aprendizagem. Assim, não perca a oportunidade de revisar, ler e buscar novas informações com toda a nossa equipe docente e também com os seus colegas de curso ou de trabalho.

Siga em frente com a certeza de que você está caminhando firme!

Estamos por aqui para trocar idéias!



Referências

ANDRADE, L. N. Uma Generalização de Briot-Ruffini. **Revista do Professor de Matemática**, n. 34, 2º. quadrimestre de 1997, p. 14-20.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: UNICAMP, 1995.

GARBI, G.G. **O romance das equações algébricas**: A história da álgebra. São Paulo: Makron Books, 1997.

GUELLI, O. **Contando a História da Matemática**. História da equação do segundo grau, v.3. São Paulo: Ática, 1994.

GUELLI, Oscar. Contando a história da matemática. **Equação**: O Idioma da álgebra, v.2. São Paulo: Ática, 1993.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática**: ciência e aplicações. Vol. 2. 2ª ed. São Paulo: Atual, 2004.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática**: volume único. São Paulo: Atual, 1997.



Sobre as professoras conteudistas

Diva Marília Flemming é doutora em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). É mestre em Matemática Aplicada e graduada em Matemática, ambos pela UFSC. Já atuou no ensino de disciplinas em curso de administração na Universidade para o Desenvolvimento do Estado de SC (UDESC), como professora convidada. Aposentada como professora pela UFSC, atualmente é professora e pesquisadora na Universidade do Sul de Santa Catarina (UNISUL). No contexto do ensino de Matemática tem desenvolvido suas atividades na Unisul com alunos dos cursos de Engenharia e de Matemática. É autora de livros de Cálculo Diferencial e Integral, adotados em vários estados do Brasil. Como pesquisadora, no Núcleo de Estudos em Educação Matemática (NEEM – UNISUL), dedica-se à Educação Matemática com ênfase nos recursos tecnológicos. Sua atual paixão profissional está nos desafios da educação a distância, realizando experimentos na formação de professores de Matemática. Atualmente, coordena na UnisulVirtual dois cursos oferecidos a distância: Graduação em Matemática – Licenciatura e Pós-Graduação em Educação Matemática. É autora de vários livros didáticos utilizados na UnisulVirtual.

Elisa Flemming Luz é doutora em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), mestre em Engenharia Elétrica e graduada em Engenharia Elétrica, ambos pela UFSC. Atuou como professora da Unisul de 1996 até agosto de 2006 ministrando aulas em disciplinas na área da Matemática para os cursos de Engenharia e Matemática. Ministra disciplinas em cursos de especialização presencial e a distância. Desenvolveu diversas pesquisas no Núcleo de Estudos em Educação Matemática (NEEM – UNISUL) na área de Educação Matemática. Atualmente é professora do CEFET de Santa Catarina.



Respostas e comentários das atividades de auto-avaliação

Unidade 1

- 1) No Brasil, antes da alteração do sistema de emplacamento de automóveis, as placas dos veículos eram confeccionadas usando-se 2 letras do alfabeto e 4 algarismos. Qual o número máximo de veículos que podia ser licenciado neste sistema?

Solução:

A resolução deste problema é o caso de arranjos com repetição envolvendo as 26 letras do nosso alfabeto e os 10 dígitos do sistema numérico. Vamos, também, identificar o uso do princípio fundamental da contagem. Temos:

- Escolha das letras – $(AR)_{26,2}$;
- Escolha dos números – $(AR)_{10,4}$.

Assim, a resposta final é:

$$(AR)_{26,2} \times (AR)_{10,4} = 26^2 \times 10^4 = 676 \times 10000 = 6.760.000$$

veículos.

- 2) Calcule o número de formas distintas de 5 pessoas ocuparem os lugares de um banco retangular de cinco lugares.

Solução:

Temos permutação simples. $P_5 = 5! = 120$ formas.

- 3) Calcule o número de anagramas da palavra MUNDIAL.

Solução:

Temos permutação simples. $P_7 = 7! = 5040$.

- 4) Determine o número de anagramas da palavra MATEMÁTICA. (Não considere o acento).

Solução:

Temos permutação com repetição. $P_{10}^{2,3,2} = \frac{10!}{2!3!2!} = 15.120$ anagramas.

- 5) Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra ARARA?

Solução:

Temos permutação com repetição. $P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!2!} = 10$ anagramas.

- 6) Uma prova consta de 12 questões, das quais o aluno deve resolver 10. De quantas formas ele poderá escolher as 10 questões?

Solução:

Temos o caso de combinações simples.

$$C_{12,10} = \frac{12!}{10!2!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!2!} = \frac{132}{2} = 66 \text{ formas.}$$

- 7) Quantos números com cinco algarismos podemos construir com os números ímpares 1,3,5,7,9, desde que estejam sempre juntos os algarismos 1 e 3.

Solução:

Para resolver basta considerar que 13 ou 31 são elementos que junto com os demais números serão usados para formar os agrupamentos. Assim, temos permutações simples de 4 elementos que serão consideradas em dois momentos: usando 13 ou 31.

$$2P_4 = 2 \cdot 4! = 48 \text{ números.}$$

- 8) Quantos são os anagramas possíveis com as letras: ABCDEF, começando por A.

Solução:

Temos permutação simples. $P_5 = 5! = 120$.

- 9) Quantos são os anagramas possíveis com as letras: ABCDEFGHI, começando por AB?

Solução:

Temos permutação simples, considerando AB um único elemento que ocupará a posição inicial do anagrama. $P_7 = 7! = 5.040$.

- 10) Quantos são os anagramas possíveis com as letras: ABCDEFGHI, começando por uma vogal e terminando por uma consoante?

Solução:

Temos permutação simples, considerando também o princípio fundamental da contagem. Temos:

- Escolha das vogais - P_3 ;
- Escolha das consoantes - P_6

Assim, o resultado final é dado por $P_3 \times P_6 = 3! \times 6! = 6 \times$

- 11) Há 10 pessoas em um desfile, sendo 3 com camisas verdes, 3 com camisas amarelas, 2 com camisas azuis e 2 com camisas brancas. De quantos modos podemos perfilar todas essas 10 pessoas de modo que os grupos com as camisas de mesma cor fiquem juntos?

Solução:

Temos o caso de permutações simples associando-se o princípio fundamental da contagem. Temos:

- Permutando-se os 4 grupos formados pelas 4 cores de camisa: P_4 ;
- Permutando-se os componentes com camisa verde: P_3 ;
- Permutando-se os componentes com camisa amarela: P_3
- Permutando-se os componentes com camisa azul: P_2
- Permutando-se os componentes com camisa branca: P_2

Assim, a resposta final é dada por:

$$P_4 \times P_3 \times P_3 \times P_2 \times P_2 = 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 24 \times 6 \times 6 \times 2 \times 2 = 3.456$$

- 12) Quantos grupos de 3 pessoas pode ser formado com 8 pessoas?

Solução:

Temos o caso de combinações simples.

$$C_{8,3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3!5!} = \frac{336}{6} = 56 \text{ grupos.}$$

- 13) Em uma sala existem 40 pessoas, 18 mulheres e 22 homens. Quantas comissões podem ser montadas nesta sala contendo 3 mulheres e 5 homens?

Solução:

Temos o caso de combinações simples associando-se o princípio fundamental da contagem. Temos:

- Escolha dos homens: $C_{22,5}$;
- Escolha das mulheres: $C_{18,3}$

A resposta final é dada por:

$$C_{22,5} \times C_{18,3} = \frac{22!}{5!17!} = \frac{17!}{3!14!} = 26.334 \times 816 = 21.488.544$$

comissões.

- 14) Resolver a equação $3 C_{x+1,3} = 2 C_{x+2,2}$.

Solução:

Temos:

$$6 \times C_{x+1,3} = 2 C_{x+2,2}$$

$$6 \times \frac{(x+1)!}{3!(x+1-3)!} = 2 \times \frac{(x+2)!}{2!(x+2-2)!}$$

$$6 \times \frac{(x+1)!}{3!(x-2)!} = 2 \times \frac{(x+2)!}{2!(x)!}$$

$$\frac{(x+1)x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!} = 2 \times \frac{(x+2)(x+1)x!}{2!x!}$$

$$(x+1)x(x-1) = (x+2)(x+1)$$

$$x(x-1) = (x+2)$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

Vamos obter dois valores irracionais: $x = 1 \pm \sqrt{3}$.

- 15) Quantos números com 4 algarismos podemos formar com os algarismos: 0,1,2,3,4,5,6,7,8 e 9.

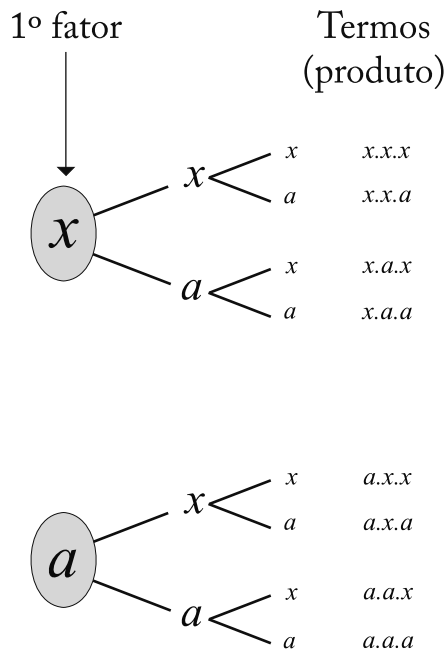
Solução:

Temos arranjos com repetição. $(AR)_{10,4} = 10^4 = 10.000$ números.

Unidade 2

1) Desenvolva a expressão usando o diagrama de árvore.

Solução: O diagrama de árvore para a resolução de $(x + a)^3$ é apresentado na figura a seguir.



Assim,

$$\begin{aligned} (x + a)^3 &= x.x.x + x.x.a + x.a.x + x.a.a + a.x.x + a.x.a + a.a.x + a.a.a \\ &= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 \end{aligned}$$

2) Desenvolva as seguintes expressões usando o teorema binomial.

a) $(x + 3y)^3$

b) $(3 - z)^5$

c) $(4 - x^3)^4$

d) $(x + y)^{10}$

(a) Neste caso, $x = x$ e $a = 3y$:

$$\begin{aligned} (x + 3y)^3 &= \binom{3}{0} \cdot (3y)^0 \cdot x^3 + \binom{3}{1} \cdot (3y)^1 \cdot x^2 + \binom{3}{2} \cdot (3y)^2 \cdot x^1 + \binom{3}{3} \cdot (3y)^3 \\ &= x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3 \end{aligned}$$

(b) Neste caso, $x = 3$ e $a = -z$:

$$\begin{aligned} (3-z)^5 &= \binom{5}{0} \cdot (-z)^0 \cdot 3^5 + \binom{5}{1} \cdot (-z)^1 \cdot 3^4 + \binom{5}{2} \cdot (-z)^2 \cdot 3^3 + \binom{5}{3} \cdot (-z)^3 \cdot 3^2 + \binom{5}{4} \cdot (-z)^4 \cdot 3^1 + \binom{5}{5} \cdot (-z)^5 \\ &= -z^5 + 15z^4 - 90z^3 + 270z^2 - 405z + 243 \end{aligned}$$

(c) Neste caso, $x = 4$ e $a = -x^3$:

$$\begin{aligned} (4-x^3)^4 &= \binom{4}{0} \cdot (-x^3)^0 \cdot 4^4 + \binom{4}{1} \cdot (-x^3)^1 \cdot 4^3 + \binom{4}{2} \cdot (-x^3)^2 \cdot 4^2 + \binom{4}{3} \cdot (-x^3)^3 \cdot 4^1 + \binom{4}{4} \cdot (-x^3)^4 \\ &= x^{12} - 16x^9 + 96x^6 - 256x^3 + 256 \end{aligned}$$

(d) Neste caso, $x = x$ e $a = y$:

$$\begin{aligned} (x+y)^{10} &= \binom{10}{0} \cdot y^0 \cdot x^{10} + \binom{10}{1} \cdot y^1 \cdot x^9 + \binom{10}{2} \cdot y^2 \cdot x^8 + \binom{10}{3} \cdot y^3 \cdot x^7 + \binom{10}{4} \cdot y^4 \cdot x^6 + \binom{10}{5} \cdot y^5 \cdot x^5 \\ &\quad + \binom{10}{6} \cdot y^6 \cdot x^4 + \binom{10}{7} \cdot y^7 \cdot x^3 + \binom{10}{8} \cdot y^8 \cdot x^2 + \binom{10}{9} \cdot y^9 \cdot x^1 + \binom{10}{10} \cdot y^{10} \end{aligned}$$

$$(x+y)^{10} = x^{10} + 10yx^9 + 45y^2x^8 + 120y^3x^7 + 210y^4x^6 + 252y^5x^5 + 210y^6x^4 + 120y^7x^3 + 45y^8x^2 + 10y^9x + y^{10}$$

3) Determine os 3 primeiros termos do desenvolvimento de $(x+y)^{80}$.
 Considere as potências de expoentes decrescentes de x .

Solução: Os três primeiros termos serão dados por:

$$\begin{aligned} \binom{80}{0} \cdot y^0 \cdot x^{80} &= x^{80} \\ \binom{80}{1} \cdot y^1 \cdot x^{79} &= 80yx^{79} \\ \binom{80}{2} \cdot y^2 \cdot x^{78} &= 3160y^2x^{78} \end{aligned}$$

4) Determine o número de termos quando se desenvolve os seguintes binômios:

- a) $(a+b)^{10}$
- b) $(a+b)^{21}$
- c) $(a+b)^n$

Solução: O número de termos no desenvolvimento dos binômios é sempre dado por $n + 1$. Assim, para as situações apresentadas teremos:

- a) 11 termos.
- b) 22 termos.
- c) $(n + 1)$ termos.

5) Determine a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de $(4x + 2y)^5$.

Solução: Fazendo $x = 1$ e $y = 1$ teremos:

$$(4 \cdot 1 + 2 \cdot 1)^5 = (6)^5 = 7776.$$

O que indica que a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de $(4x + 2y)^5$ é igual a 7776.

6) Determine o valor de p , sabendo que a soma dos coeficientes numéricos do desenvolvimento de $(x + a)^p$ é igual a 512.

Solução: A soma dos coeficientes é obtida fazendo-se $x = a = 1$. Assim teremos:

$$(1 + 1)^p = 512$$

$$2^p = 512$$

$$2^p = 2^9$$

$$p = 9$$

Logo, o valor de p é igual a 9 para que a soma dos coeficientes seja igual a 512.

7) Qual o coeficiente de x^2 no desenvolvimento de $(2x + 1)^7$?

Solução: Usando a fórmula do termo geral, temos:

$$\binom{7}{p} \cdot (1)^p \cdot (2x)^{7-p} = \binom{7}{p} \cdot (2x)^{7-p}.$$

Para determinar o coeficiente de x^2 , o expoente de x no termo geral deve ser igual a 2:

$$7 - p = 2$$

$$p = 5$$

Substituindo no termo geral:

$$\binom{7}{5} \cdot (2x)^{7-5} = \frac{7!}{5!2!} (2x)^2 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!2} \cdot 2^2 \cdot x^2 = \frac{42}{2} \cdot 4 \cdot x^2 = 84x^2$$

Logo, o coeficiente de x^2 é igual a 84

8) Determine o coeficiente de ao desenvolver o binômio $(2-x)^6$.

Solução: Usando a fórmula do termo geral, temos:

$$\binom{6}{p} \cdot (-x)^p \cdot (2)^{6-p}$$

Para determinar o coeficiente de x^4 , o expoente de x no termo geral deve ser igual a 4: $p = 4$

Substituindo no termo geral:

$$\binom{6}{4} \cdot (-x)^4 \cdot (2)^{6-4} = \frac{6!}{4!2!} \cdot x^4 \cdot 2^2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!2} \cdot x^4 \cdot 4 = \frac{30}{2} \cdot 4x^4 = 60x^4$$

Logo, o coeficiente de x^4 é igual a 60.

9) Calcule o coeficiente de no desenvolvimento de $\left(x + \frac{3}{2x}\right)^3$.

Solução: Usando a fórmula do termo geral, temos:

$$\begin{aligned} \binom{3}{p} \cdot \left(\frac{3}{2x}\right)^p \cdot (x)^{3-p} &= \binom{3}{p} \cdot 3^p \cdot (2x)^{-p} \cdot (x)^{3-p} \\ &= \binom{3}{p} \cdot 3^p \cdot 2^{-p} \cdot x^{-p} \cdot (x)^{3-p} \\ &= \binom{3}{p} \cdot 3^p \cdot 2^{-p} \cdot x^{-p+3-p} \\ &= \binom{3}{p} \cdot 3^p \cdot 2^{-p} \cdot x^{-2p+3} \end{aligned}$$

Para determinar o coeficiente de x , o expoente de x no termo geral deve ser igual a 1:

$$-2p + 3 = 1$$

$$-2p = -2$$

$$p = 1$$

Substituindo no termo geral:

$$\binom{3}{1} \cdot 3^1 \cdot 2^{-1} \cdot x^{-2 \cdot 1 + 3} = \frac{3!}{1!2!} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot x = \frac{3 \cdot 2!}{1!2!} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot x = \frac{9}{2}x$$

Logo, o coeficiente de x é igual a $\frac{9}{2}$.

10) Determine o valor de p para que a igualdade $\binom{14}{x} = \binom{14}{2x-1}$ seja verdadeira.

Solução: Para que a igualdade $\binom{14}{x} = \binom{14}{2x-1}$ seja verdadeira, temos duas possibilidades:

$$\begin{aligned} x &= 2x-1 & x+2x-1 &= 14 \\ 2x-x &= 1 & \text{ou} & 3x &= 15 \\ x &= 1 & & & x &= 5 \end{aligned}$$

11) Qual o valor de p para que $\binom{10}{p-1} = \binom{10}{2p-3}$?

Solução: As possibilidades são:

$$\begin{aligned} p-1 &= 2p-3 & p-1+2p-3 &= 10 \\ p &= 2 & \text{ou} & 3p &= 10+4 \\ & & & & p &= \frac{14}{3} \end{aligned}$$

Unidade 3

1) Determinar o polinômio do primeiro grau que satisfaz $P(1) = 3$ e $P(-1) = -1$.

Solução: Como o polinômio $P(x)$ é do primeiro grau, tem sua forma geral dada por $P(x) = ax + b$. Então,

$$P(1) = a + b = 3 \rightarrow a = 3 - b$$

$$P(-1) = -a + b = -1$$

$$b = -1 + a$$

$$b = -1 + 3 - b$$

$$2b = 2$$

$$b = 1 \rightarrow a = 3 - 1 = 2$$

Logo, o polinômio do primeiro grau é $P(x) = 2x + 1$.

2) polinômio do segundo grau que satisfaz $P(1) = -1$,
 $P(-1) = 5$ e $P(0) = 0$.

Solução: Como o polinômio $P(x)$ é do segundo grau, ele tem a forma geral dada por $P(x) = ax^2 + bx + c$. Então,

$$P(1) = a + b + c = -1$$

$$P(-1) = a - b + c = 5$$

$$P(0) = c = 0 \rightarrow c = 0$$

Substituindo o valor de c :

$$P(1) = a + b + 0 = -1 \rightarrow a + b = -1$$

$$P(-1) = a - b + 0 = 5 \rightarrow a - b = 5$$

Então, podemos montar o sistema:

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ a - b = 5 \end{cases}$$

$$2a = 4$$

$$a = \frac{4}{2} = 2$$

Substituindo o valor de a :

$$a + b = -1 \rightarrow 2 + b = -1 \rightarrow b = -1 - 2 \rightarrow b = -3$$

Logo, o polinômio do segundo grau é $P(x) = 2x^2 - 3x$.

3) Observe a expressão $(x-2)(y+4)(z=5)$ e analise as possibilidades dessa expressão representar polinômios. Identifique termos, coeficientes, grau e raízes.

Solução: Inicialmente, é possível desenvolver a expressão a ser analisada:

$$(x-2)(y+4)(z-5) = (xy + 4x - 2y - 8)(z-5) = xyz - 5xy + 4xz - 20x - 2yz + 10y - 8z + 40$$

Polinômio em x :

$$P(x) = (yz - 5y + 4z - 20)x + (-2yz + 10y - 8z + 40)$$

Termos: $(yz - 5y + 4z - 20)x$ e $(-2yz + 10y - 8z + 40)$

Coeficientes: $(yz - 5y + 4z - 20)$ e $(-2yz + 10y - 8z + 40)$

Grav: primeiro grau ou $gr(P) = 1$

Raiz: 2.

Polinômio em y :

$$P(y) = (xz - 5x - 2z + 10)y + (4xz - 20x - 8z + 40)$$

Termos: $(xz - 5x - 2z + 10)y$ e $(4xz - 20x - 8z + 40)$

Coeficientes: $(xz - 5x - 2z + 10)$ e $(4xz - 20x - 8z + 40)$

Grau: primeiro grau ou $gr(P) = 1$

Raiz: -4.

Polinômio em z :

$$P(z) = (xy + 4x - 2y - 8)z + (-5xy - 20x + 10y + 40)$$

Termos: $(xy + 4x - 2y - 8)z$ e $(-5xy - 20x + 10y + 40)$

Coeficientes: $(xy + 4x - 2y - 8)$ e $(-5xy - 20x + 10y + 40)$

Grau: primeiro grau ou $gr(P) = 1$

Raiz: 5.

Polinômio em x e y :

$$P(x, y) = (z - 5)xy + (4z - 20)x + (-2z + 10)y + (-8z + 40)$$

Termos: $(z - 5)xy$, $(4z - 20)x$, $(-2z + 10)y$ e $(-8z + 40)$

Coeficientes: $(z - 5)$, $(4z - 20)$, $(-2z + 10)$ e $(-8z + 40)$

Grau: primeiro grau ou $gr(P) = 2$

Raiz: $(2, y)$ para qualquer y e $(x, -4)$ para qualquer x .

Polinômio em x e z :

$$P(x, z) = (y + 4)xz + (-5y - 20)x + (-2y - 8)z + (10y + 40)$$

Termos: $(y + 4)xz$, $(-5y - 20)x$, $(-2y - 8)z$ e $(10y + 40)$

Coeficientes: $(y + 4)$, $(-5y - 20)$, $(-2y - 8)$ e $(10y + 40)$

Grau: primeiro grau ou $gr(P) = 2$

Raiz: $a = y$ para qualquer z e $(x, 5)$ para qualquer x .

Polinômio em y e z :

$$P(y, z) = (x - 2)yz + (-5x + 10)y + (+4x - 8)z + (-20x + 40)$$

Termos: $(x-2)yz$, $(-5x+10)y$, $(+4x-8)$ e $(-20x+40)$

Coefficientes: $(x-2)$, $(-5x+10)$, $(+4x-8)$ e $(-20x+40)$

Grau: primeiro grau ou $gr(P)=2$

Raiz: $(-4, z)$ para qualquer z e $(y, 5)$ para qualquer y .

Polinômio em x , y e z :

$$P(x, y, z) = xyz - 5xy + 4xz - 20x - 2yz + 10y - 8z + 40$$

Termos: xyz , $-5xy$, $4xz$, $-20x$, $-2yz$, $10y$, $-8z$ e 40

Coefficientes: 1 , -5 , 4 , -20 , -2 , 10 , -8 e 40

Grau: primeiro grau ou $gr(P)=3$

Raiz: $(2, y, z)$ para qualquer y e z e $(x, -4, z)$ para qualquer x e z e $(x, y, 5)$ para quaisquer x e y .

4) Dados $P(x) = 2x^5 - 3x^3 + 2x - 5$, $Q(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x - 4$ e $R(x) = 5x - 2$, calcule:

a) $2Q(x) - \frac{1}{2}xQ(x)$

Solução:

$$\begin{aligned} 2Q(x) - \frac{1}{2}xQ(x) &= 2\left(\frac{1}{2}x^3 + 2x - 4\right) - \frac{1}{2}x\left(\frac{1}{2}x^3 + 2x - 4\right) \\ &= x^3 + 4x - 8 - \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 2x \\ &= -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2 + 6x - 8 \end{aligned}$$

b) $(x-2)P(x) + R(x)$

Solução:

$$\begin{aligned} (x-2)P(x) + R(x) &= (x-2)(2x^5 - 3x^3 + 2x - 5) + (5x - 2) \\ &= 2x^6 - 3x^4 + 2x^2 - 5x - 4x^5 + 6x^3 - 4x + 10 + 5x - 2 \\ &= 2x^6 - 4x^5 - 3x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 4x + 8 \end{aligned}$$

5) Determine o resto da divisão $(2x^3 - 2x + 5)/(3x^2 - 1)$.

$$\frac{(2x^3 - 2x + 5)}{(3x^2 - 1)} = \left(\frac{2}{3}x\right) + \left(\frac{-\frac{4}{3}x + 5}{3x^2 - 1}\right)$$

O resto da divisão é $-\frac{4}{3}x + 5$

6) Dados $P(x, y) = 2xy - x^2y^3$

$$Q(x, y) = -2(x + y)$$

$$R(x, y) = (x + y)(2x - y^2)$$

Calcular:

a) $2P + 3Q - R$

b) $\frac{P}{Q}$

Soluções:

$$\begin{aligned} \text{a) } 2P + 3Q - R &= 2(2xy - x^2y^3) + 3 \cdot (-2)(x + y) - (x + y)(2x - y^2) = \\ &= 4xy - 2x^2y^3 - 6x - 6y - (2x^2 - xy^2 + 2xy - y^3) = \\ &= 4xy - 2x^2y^3 - 6x - 6y - 2x^2 + xy^2 - 2xy + y^3 = \\ &= 2xy - 2x^2y^3 - 6x - 6y - 2x^2 + xy^2 + y^3 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{P}{Q} = \frac{2xy - x^2y^3}{-2x - 2y} = \left(-y + \frac{xy^3}{2} - \frac{y^4}{2}\right) + \frac{-2y^2 - y^5}{-2x - 2y}$$

7) É comum aparecerem problemas históricos ou lógicos que envolvem polinômios. No decorrer do desenvolvimento da Matemática, vários matemáticos empenharam-se na resolução de problemas que nos dias de hoje são modelados por expressões polinomiais. Os grandes clássicos no contexto da matemática eram místicos e misturavam ciência e religião. A linguagem usada era a verbal, assim, o tema era falado em voz alta e os alunos deveriam decorar. Eram ditos populares, em geral em versos. Um exemplo apresentado por Oscar Guelli, no livro *Contando a História da Matemática: História da equação do 2º. grau.*

Alegravam-se os macacos
 divididos em dois bandos:
 sua oitava parte ao quadrado
 no bosque brincava.
 Com alegres gritos, doze
 gritando no campo estão
 Sabes quantos macacos há
 na manada no total?

Que tal determinar a equação polinomial que determina o número de macacos?

Solução: Este verso pode ser traduzido numa linguagem algébrica. Veja:

$$x = \left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12$$

Estamos diante de uma equação algébrica do tipo polinomial

$$x^2 - 64x + 768 = 0$$

Observar que a solução da pergunta proposta no verso não é única.

8) Calcular as seguintes divisões:

a) $\frac{6x^3 + 2x^2 - 3}{4x^3 - 1}$

b) $\frac{2x^4 - 2x^3 + 5x - 3}{2x + 5}$

Soluções:

a) $\frac{6x^3 + 2x^2 - 3}{4x^3 - 1} = \frac{6}{4} + \frac{2x^2 - 6}{4x^3 - 1}$

b) $\frac{2x^4 - 2x^3 + 5x - 3}{2x + 5} = \left(x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{35}{4}x - \frac{155}{8}\right) + \frac{751}{2x + 5}$

Você pode ainda utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini em sua forma tradicional ou na forma generalizada.

Unidade 4

1) Faça o gráfico das seguintes funções polinomiais usando um software gráfico e identifique as seguintes propriedades e características: domínio, conjunto imagem, raízes, crescimento ou decrescimento, pontos de máximo ou mínimo.

a) $y = 5x - 1/3$

b) $y = (x - 3)(2x + 4)$

c) $y = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 4$

d) $y = x^5 + 1$

Soluções:

(a) A Figura 1 apresenta o gráfico da função

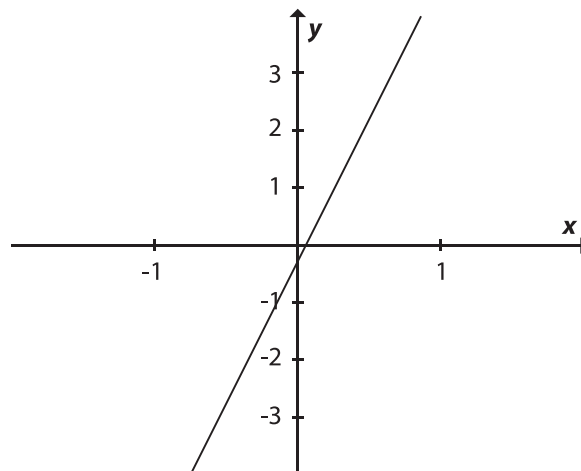


Figura 1

Propriedades e Características:

- Domínio: Conjunto dos Reais.
- Conjunto Imagem: Conjunto dos Reais.
- Raízes: $x = \frac{1}{15} \cong 0,066$.
- Crescimento ou decrescimento: a função é sempre crescente.
- Pontos de máximo e mínimo: Não têm máximos ou mínimos.

(b) A Figura 2 apresenta o gráfico da função do segundo grau ou função quadrática $y = (x - 3)(2x + 4)$

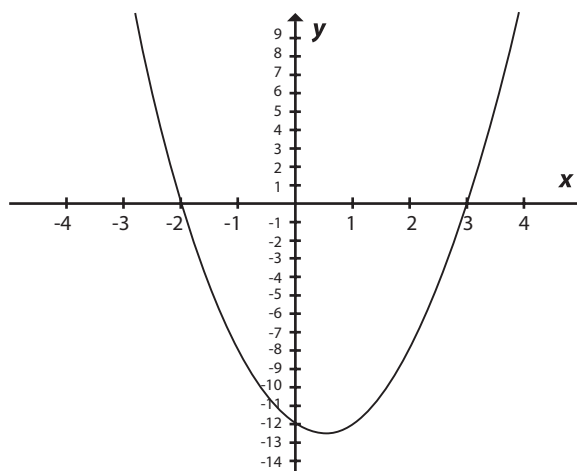


Figura 2

Propriedades e Características:

- Domínio: Conjunto dos Reais.
- Conjunto Imagem: $\left[-\frac{25}{2}, +\infty\right)$. Observe na Figura 5 que o cálculo do limite inferior foi feito no Derive, usando os recursos do Cálculo Diferencial, mas você pode também usar os recursos do cálculo do vértice algebricamente sem o uso de derivadas.
- Raízes: $x_1 = 3$ e $x_2 = -2$. Observe que as raízes podem ser visualizadas diretamente no gráfico e também na expressão algébrica.
- Crescimento ou decrescimento: a função é decrescente em $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ e crescente em $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Observe que você pode expressar o intervalo aberto em $\frac{1}{2}$.
- Pontos de máximo e mínimo: O ponto de mínimo está no vértice a parábola em $\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{2}\right)$. Observe que $\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{2}\right)$ é um ponto e não deve ser confundido com intervalo.

(c) A Figura 3 apresenta o gráfico da função

$$y = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 4 .$$

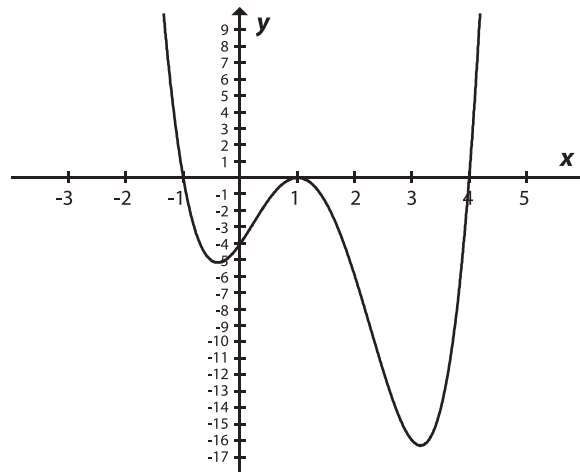


Figura 3

Propriedades e Características:

- **Domínio:** Conjunto dos Reais.
- **Conjunto Imagem:** $[3,14; +\infty)$. Observe que o limite inferior (3,14) é aproximado e foi obtido com recursos computacionais, utilizando inicialmente o cálculo da derivada (ver Figura 5). Você poderia visualizar no gráfico com uma menor precisão.
- **Raízes:** Esta é uma função polinomial do quarto grau e, portanto, tem 4 raízes que estão visíveis graficamente: 4, -1, 1 e 1. Você deve observar que no ponto $x = 1$ o gráfico tangencia o eixo, caracterizando a multiplicidade da raiz. Experimente usar também o método de Ruffini.
- **Crescimento ou decrescimento:** Veja os intervalos de crescimento e decrescimento. Acompanhe graficamente e os limites foram obtidos com os recursos do derive: decrescente em $(-\infty; -0,39)$; crescente em $(-0,39; 1)$; decrescente em $(1; 3,14)$ e crescente em $(3,14; +\infty)$. Observe a notação dos intervalos com o ponto e vírgula, pois estamos expressando os limites em formato decimal. Isto facilita a identificação dos limites do intervalo.
- **Pontos de máximo e mínimo:** Com o auxílio do gráfico e com os dados obtidos no Derive, podemos estabelecer que: em $x = 1$ temos um ponto de mínimo; em $x \cong -0,39$ temos um ponto de máximo e em $x = 3,14$ temos um ponto de inflexão.

(d) A Figura 4 mostra o gráfico da função $y = x^5 + 1$.

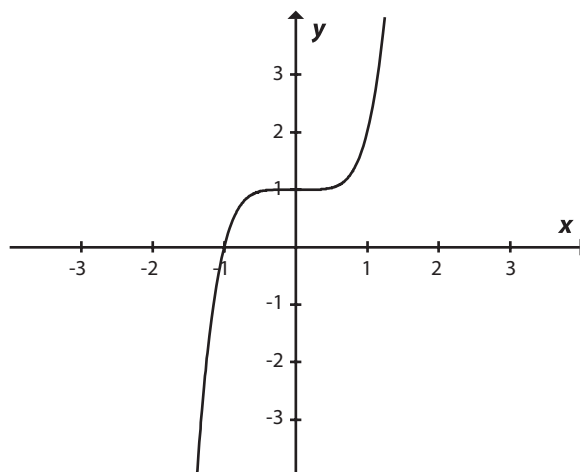


Figura 4

Propriedades e Características:

- Domínio: Conjunto dos Reais.
- Conjunto Imagem: Conjunto dos Reais.
- Observe que o grau da função sendo ímpar o gráfico não tangencia o eixo. Neste caso estamos diante de 4 raízes complexas

$-0,3 \pm 0,95i$ e $0,8 \pm 0,58i$ e somente uma raiz real $x = -1$).

A raiz real está visível graficamente e as raízes complexas foram obtidas usando-se o Derive (ver Figura 5).

- Crescimento ou decréscimo: a função é sempre crescente.
- Pontos de máximo e mínimo: Não têm máximos ou mínimos.

Para finalizar esta atividade apresentamos a Figura 5 que mostra as etapas usadas no Derive para a obtenção dos dados apresentados.

#1: $5 \cdot x - \frac{1}{3}$

#2: $\text{SOLVE}\left(5 \cdot x - \frac{1}{3}, x\right)$

#3: $x = \frac{1}{15}$

#4: $x = 0.06666666666$

#5: $(x - 3) \cdot (2 \cdot x + 4)$

#6: $\frac{d}{dx} ((x - 3) \cdot (2 \cdot x + 4))$

#7: $2 \cdot (2 \cdot x - 1)$

#8: $\text{SOLVE}(2 \cdot (2 \cdot x - 1), x)$

#9: $x = \frac{1}{2}$

#10: $-\frac{25}{2}$

#11: $x^4 - 5 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 5 \cdot x - 4$

#12: $\text{SOLVE}(x^4 - 5 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 5 \cdot x - 4, x)$

#13: $x = 4 \vee x = -1 \vee x = 1$

#14: $\frac{d}{dx} (x^4 - 5 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 5 \cdot x - 4)$

#15: $4 \cdot x^3 - 15 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 5$

#16: $\text{SOLVE}(4 \cdot x^3 - 15 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 5, x)$

#17: $x = -0.3971808598 \vee x = 3.147180859 \vee x = 1$

#18: $x^5 + 1$

#19: $\text{SOLVE}(x^5 + 1, x)$

#20: $x = 0.8090169943 - 0.5877852522 \cdot i \vee x = 0.8090169943 + 0.5877852522 \cdot i \vee x = -0.3090169943 - 0.9510565162 \cdot i \vee x = -0.3090169943 + 0.9510565162 \cdot i \vee x = -1$

Figura 5

- 2) As pessoas que participaram de um banquete trocaram apertos de mãos. Um dos serviçais notou que foram 435 cumprimentos e que $\frac{2}{3}$ dos convidados eram mulheres. Quantos homens estavam presentes?

(Guelli, O. Contando a História da Matemática: História da equação do segundo grau. São Paulo: Ática, 1994, p.45).

Solução:

Se o número total de pessoas presentes ao banquete é x , cada pessoa dá $x-1$ apertos de mãos, pois ela não precisa cumprimentar a si mesma. Por outro lado, quando duas pessoas se cumprimentam a contagem é somente um aperto de mão. Portanto, a modelagem do problema é dada por:

$$\frac{x(x-1)}{2} = 435 \cdot$$

Simplificando esta expressão, vamos obter uma equação do segundo grau.

$x^2 - x - 870 = 0$. Resolvendo usando Bhaskara temos:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-870)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 3840}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3481}}{2} = \frac{1 \pm 59}{2}$$

Temos duas raízes: -29 e 30. Como não podemos ter como resposta um número negativo, vamos considerar somente o valor positivo 30 convidados.

Sabendo que $\frac{2}{3}$ são mulheres, tem-se que $\frac{2}{3}$ de 30 representa 20 mulheres e então concluímos que na festa estavam presentes 10 homens.

- 3) Quantos anos têm Ana e Marta, se a soma das idades mais a diferença entre elas mais seu produto é igual a 100 anos, e Ana é mais velha do que Marta?

(GUELLI, O. Contando a História da Matemática: Equação – O idioma da álgebra, São Paulo: Ática, 1993, p. 42)

Solução:

Se representarmos por x a idade de Ana e por y a idade de Marta, poderemos escrever a equação (polinomial de duas variáveis):

$$(x + y) + (x - y) + xy = 100 .$$

Vamos expressar y em termos de x :

$$\begin{aligned} x + y + x - y + xy &= 100 \\ 2x + xy &= 100 \\ x(2 + y) &= 100 \\ 2 + y &= \frac{100}{x} \\ y &= \frac{100}{x} - 2 \end{aligned}$$

Encontramos, assim, uma função que não é do tipo polinomial. Supondo que as idades são números inteiros (significa que só podemos usar números x que são divisores de 100) e que Ana é mais velha do que Marta ($x > y$), você poderá concluir as idades. Para facilitar, você pode montar a tabela da função:

x (Ana)	$y = \frac{100}{x} - 2$ (Marta)
1	98
2	48
4	23
5	18
10	8
20	3
25	2
50	0
100	-1

Veja que a resposta do nosso problema não é única. Temos as seguintes hipóteses para o par de idades (Ana, Marta): (10,8); (20,3) e (25,2).

4) Obter as raízes da equação $10x^3 - 34x^2 + 16x + 24 = 0$

Solução: A Figura 6 mostra o gráfico da função $y = 10x^3 - 34x^2 + 16x + 24$ cujas raízes são exatamente iguais às raízes da equação dada.

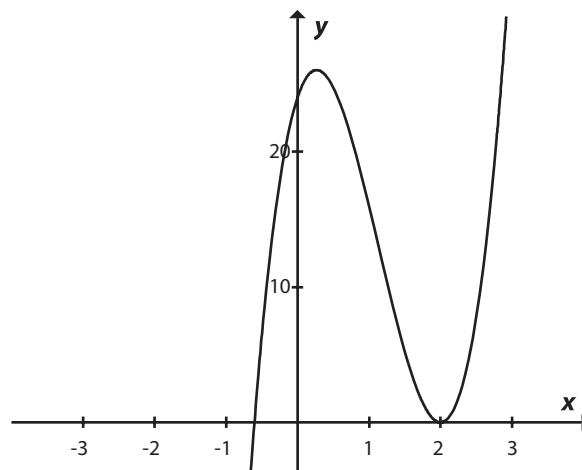


Figura 5

Podemos observar uma raiz igual a dois que tem multiplicidade 2.

Podemos aplicar o Ruffini para constatar isto e encontrar a outra raiz.

	10	-34	16	24
2		20	-28	-24
	10	-14	-12	0
2		20	12	
	10	6	0	

Temos que a terceira raiz vai ser encontrada usando-se a expressão $10x + 6 = 0$, resultando a raiz $3/5$.

- 5) Exemplifique um polinômio $P(x)$ que tenha a raiz 2 com multiplicidade 3, raiz 1 com multiplicidade 4 e que satisfaça a relação $P(0) = -8$.

Solução: Podemos apresentar o polinômio fatorado:

$P(x) = (x - 2)^3(x - 1)^4$ e verificar se este polinômio satisfaz a relação $P(0) = -8$. Da fato $P(0) = (0 - 2)^3(0 - 1)^4 = -8 \cdot 1 = -8$.

Portanto, a resposta final pode ser apresentada na forma fatorada

$$P(x) = (x - 2)^3(x - 1)^4.$$

- 6) Aplicar o dispositivo de Ruffini para resolver as seguintes equações:

(a) $10x^4 - 14x^3 - 52x^2 + 56x = -48$

(b) $2x^3 - 7x^2 - 2x + 7 = 0$

Solução de (a):

	10	-14	-52	56	48
2		6	12	-80	-48
	10	6	-40	-24	0
2		20	52	24	
	10	26	12	0	
-2		-20	-12		
	10	6	0		

Fazendo $10x + 6 = 0$ vamos encontrar a raiz $-3/5$. Assim, as raízes são: $2, 2, -2$ e $-3/5$.

Solução de (b):

	2	-7	-2	7
-1		-2	9	-7
	2	-9	7	0
1		2	-7	
	2	-7	0	

Fazendo $2x - 7 = 0$ vamos encontrar a raiz $7/2$. Assim, as raízes são: -1 , 1 , e $7/2$.

- 7) Encontre um polinômio do quarto grau que tenha duas raízes complexas iguais a $1+2i$ e $1-2i$, uma raiz real igual a 1 com multiplicidade 2 .

Vamos fazer $P(x) = (x - (1 + 2i))(x - (1 - 2i))(x - 1)^2$.

Fazendo as operações podemos apresentar o resultado como

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 5 .$$

